Chapitre 5 - Opérateurs linéaires - Fonction Filtrage

Objectifs du chapitre

La conception d'un montage électronique résulte d'un besoin : alimenter le moteur d'un jouet ; amplifier un son ; etc. On dispose pour cela d'une source d'énergie électrique : le secteur, une pile, etc. Entre les deux, il nous faut connecter un montage dont le rôle est de transformer le signal fourni par le générateur en un signal adapté à notre objectif.
Dans ce chapitre, seront définis les outils permettant de décrire comment le montage permet de modifier le signal d'entrée en un signal de sortie adapté : sa fonction de transfert et sa fonction électronique.
La méthode d'étude de ce système repose sur le tracé de deux courbes constituant le diagramme de Bode du système.

I. Fonction de transfert d'un opérateur linéaire

1. Définition

Un montage constitue une chaîne électronique : En amont, un dipôle générateur ; en aval, la charge ; entre les deux, une succession d'opérateurs qui modifient la **tension d'entrée** $u_e(t)$, afin de l'adapter à la charge (**tension de sortie** $u_s(t)$).
Chaque opérateur réalise une **fonction électronique** : *amplification, inversion de signe, sommation, etc.*
Si l'opérateur est constitué de dipôles linéaires (résistances, condensateurs, bobines), c'est un **opérateur linéaire**.
On peut définir deux grandeurs d'entrée : u_e et i_e ; et deux grandeurs de sortie : u_s et i_s. C'est un *quadripôle*.
En régime sinusoïdal forcé, l'opérateur est caractérisé par sa **fonction de transfert** : $\underline{H}(j\omega t)$:

$$\boxed{\underline{H}(j\omega t) = \frac{\underline{u_s}(j\omega t)}{\underline{u_e}(j\omega t)}}$$

Analyse qualitative :

Calcul de la fonction de transfert (exemple) :

2. Intérêt de la fonction de transfert

Suite de l'exemple précédent : La tension d'entrée s'écrit : $u_e(t) = U_{emax}\cos(\omega t + \phi_e)$ et la tension de sortie : $u_s(t) = U_{smax}\cos(\omega t + \phi_s)$

- Module de la fonction de transfert : $|\underline{H}| = \dfrac{U_{smax}}{U_{emax}}$
- Argument de la fonction de transfert : $Arg\left(\underline{H}\right) = \phi_s - \phi_e$

II. Fonction électronique de filtrage

1. Spectre d'un signal

- Théorème de Fourier :

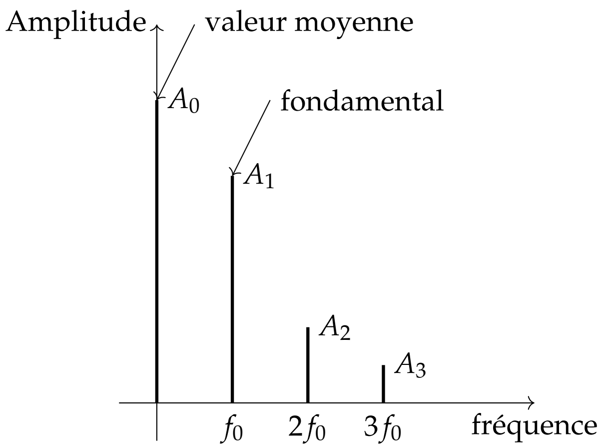
Tout signal périodique $s(t)$ de fréquence f est développable en série de Fourier, c'est à dire peut s'écrire sous la forme d'une somme de fonction sinusoïdales :

$$s(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(2\pi f_k\, t) + B_k \sin(2\pi f_k\, t)$$

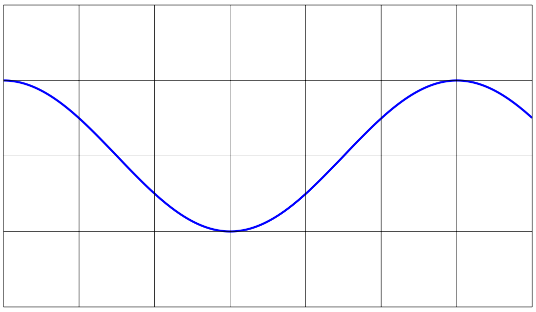
$$s(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(2\pi f_k\, t + \phi_k)$$

$s(t)$ est la somme d'un signal continu A_0 et de fonctions sinusoïdales de fréquences $f, 2f, ..., nf$.
A_0 est la **valeur moyenne** de $s(t)$.
Les termes $A_k \cos(2\pi k\, ft + \phi_k)$ s'appellent les **harmoniques** de $s(t)$. Le premier harmonique $A_1 \cos(2\pi\, ft + \phi_1)$ s'appelle le fondamental de $s(t)$. Le fondamental de $s(t)$ a même fréquence f que la fonction périodique $s(t)$.

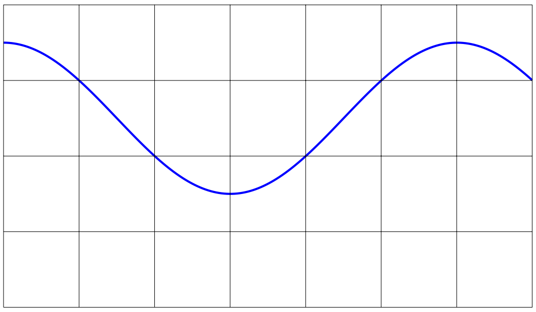
On nomme **spectre du signal** la réprésentation fréquentielle d'un signal. On trance les amplitudes de chaque harmonique en fonction des fréquences de ces mêmes harmoniques :



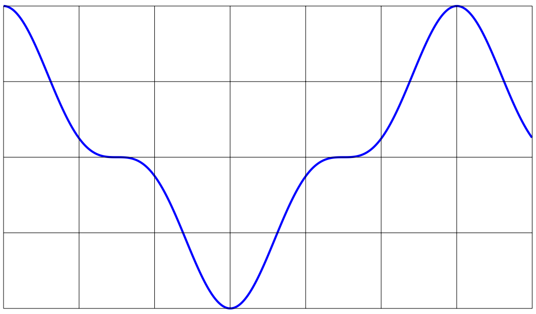
Tout signal périodique est donc une somme de termes sinusoïdaux. On peut décrire ce signal en traçant son spectre.



$e(t) = \cos(2\pi f_0\, t)$



$e(t) = 0,5 + \cos(2\pi f_0\, t)$

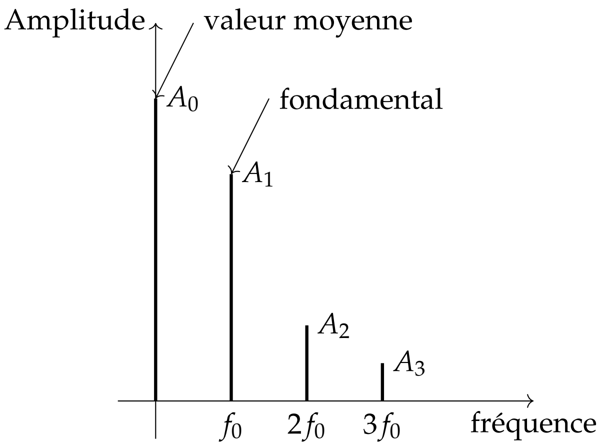


$e(t) = 2\cos^3(2\pi f_0\, t)$

Application pratique : Connaitre la réponse d'un système à une excitation sinusoïdale (en connaissant sa fonction de transfert) permet aussi de connaitre immédiatement la réponse de ce même système à toute excitation périodique (somme d'excitations sinusoïdales) grâce au principe de superposition.

2. Définition d'un filtre parfait

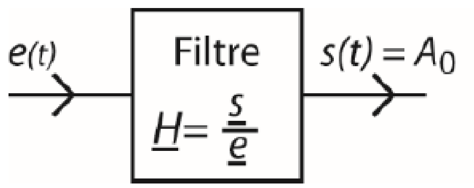
Soit une excitation périodique $e(t)$ de fréquence f_0.
Ses harmoniques sont de la forme :
$e_k(t) = A_k \cos[2\pi k f_0 t + \phi_k]$.



Un **filtre** est un opérateur qui transmet de manière sélective des harmoniques de $e(t)$.

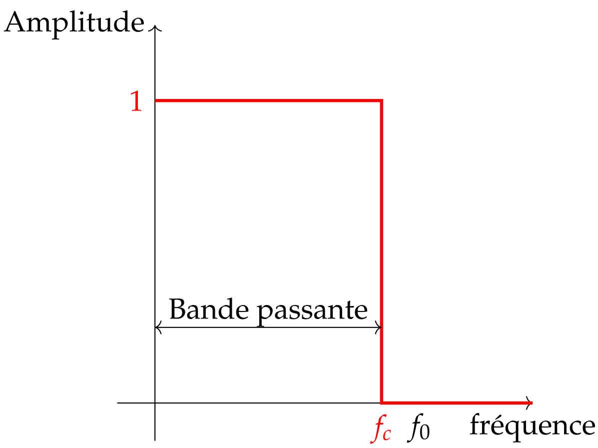
Exemple

On veut obtenir la valeur moyenne du signal : la tension de sortie $s(t)$ doit être égale à A_0. Il faut donc annuler toutes les harmoniques $k \geq 0$: A_1, A_2, ...
On en déduit les caractéristiques du filtre. Soit $f_c < f_0$, la fonction de transfert doit s'écrire telle que :



- pour $f \in [0, f_c]$, $\underline{\text{H}}$=1
- pour $f \in [f_c, +\infty]$, $\underline{\text{H}}$=0

On représente la fonction de transfert par le graphe ci-contre.
f_c est la fréquence de coupure et l'intervalle $[0, f_c]$ est la **bande passante**

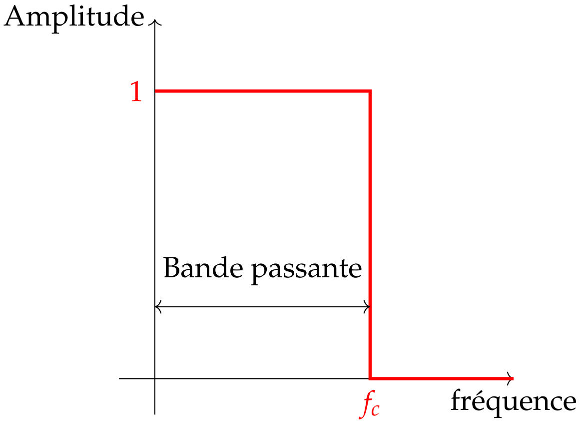


Pour un filtre parfait :	dans la bande passante	$\underline{\text{H}}$=1
	en dehors de la bande passante	$\underline{\text{H}}$=0

3. Les quatre types de filtres

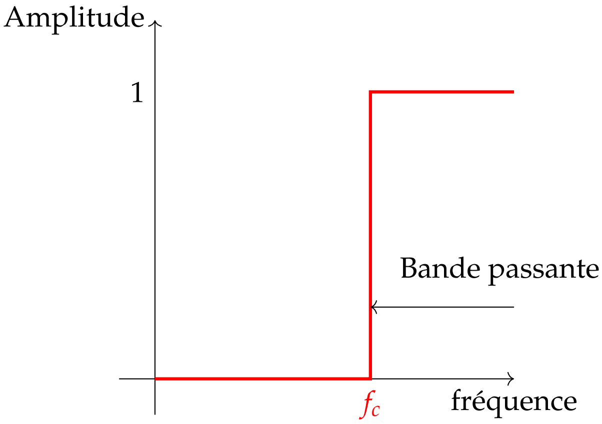
Filtre passe-bas : transmet les signaux de basse fréquence et annule les signaux de haute fréquence.

Application : circuit moyenneur (mesure de la valeur moyenne d'un signal)
principe du fonctionnement d'un voltmètre en position DC



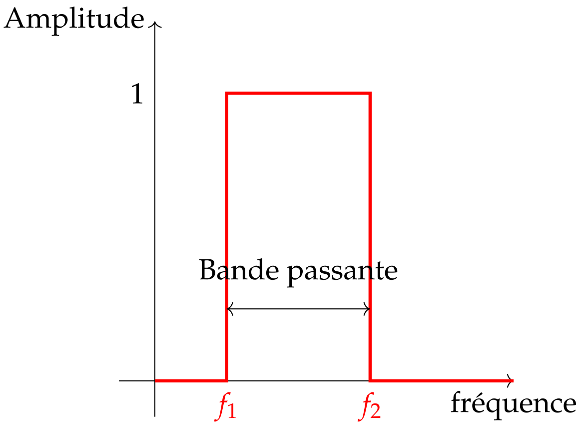
Filtre passe-haut : transmet les signaux de haute fréquence et annule les signaux de basse fréquence.

Application : annulation de la valeur moyenne d'un signal (la valeur moyenne A_0 est dans la bande coupée : elle n'est pas transmise).
principe du fonctionnement d'un oscilloscope en position AC



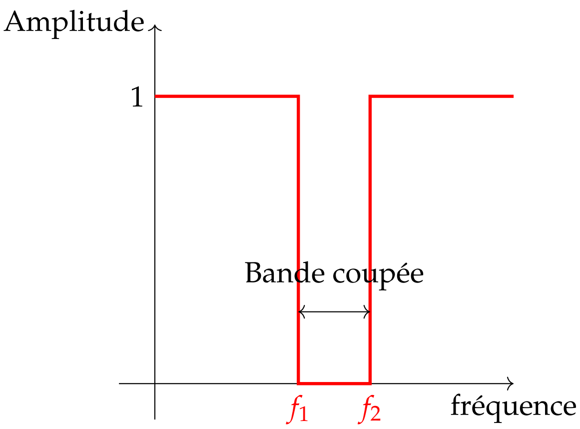
Filtre passe-bande : transmet les signaux dont la fréquence est comprise entre deux valeurs f_1 et f_2.

Application : circuit d'accord d'un récepteur radio. Soit une station radio émettant sur une fréquence f_0. Quand on règle un récepteur radio, on déplace la bande passante $[f_1, f_2]$. Quand celle-ci contient la fréquence émettrice f_0, le récepteur est accordé.



Filtre réjecteur (ou coupe-bande) : Annule les signaux dont la fréquence est comprise entre deux valeurs f_1 et f_2.

Application : élimination du bruit à 50 Hz. 50 Hz est la fréquence du secteur. Les petits signaux sont perturbés par des parasites à 50 Hz. Un filtre réjecteur, dont la bande coupée contient la fréquence 50 Hz, permet d'éliminer ce bruit.



III. Méthode d'étude de la réponse fréquentielle d'un opérateur linéaire

La fonction de transfert $\underline{H}$ dépend de la pulsation ω (ou de la fréquence f). C'est aussi un nombre complexe dont on peut calculer le module et l'argument.
Pour représenter cette fonction, on doit tracer **deux** graphiques en fonction de la pulsation ω (ou de la fréquence f) :

- un graphique pour le module : c'est le **diagramme de Bode en gain**.

  On trace le **gain** selon l'expression :

$$\boxed{G_{dB}(\omega) = 20\log\left(|\underline{H}|\right) = 20\log\left(\frac{U_{smax}}{U_{emax}}\right)}$$

- un graphique pour l'argument : c'est le **diagramme de Bode en phase**

$$\boxed{\varphi(\omega) = Arg\left(\underline{H}\right) = \phi_s - \phi_e}$$

Exemple de diagramme de Bode pour $\underline{H} = \dfrac{1}{1 + jRC\omega}$

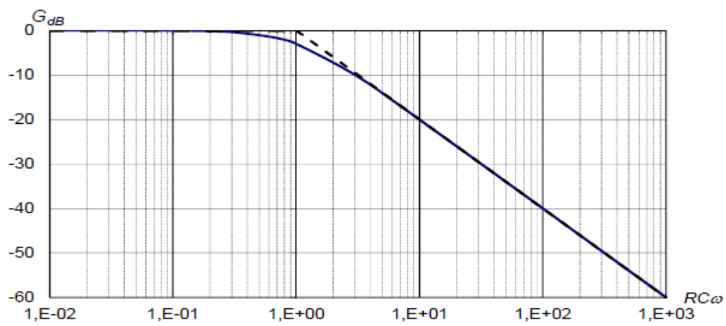


Diagramme de Bode en gain

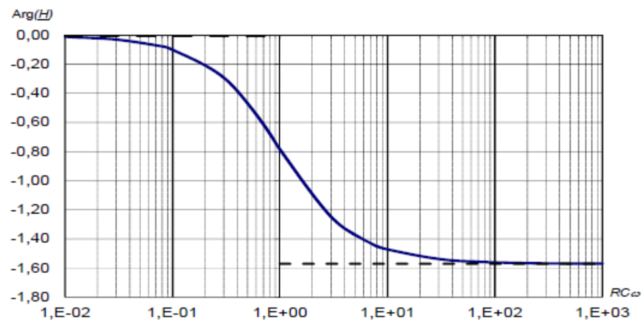


Diagramme de Bode en phase

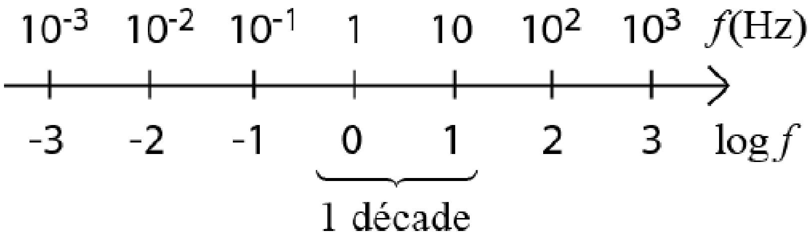
1. Description du diagramme de Bode

Gain en décibel

Le gain permet de calculer des rapport de puissances entre l'entrée et la sortie : $G = \log\left(\frac{P_s}{P_e}\right)$. Si la puissance en sortie est 10 fois plus grande que la puissance en entrée, le gain est 1, si c'est 1000 fois plus grande alors le gain est 3. L'unité du gain est le Bel.
On utilise plus couramment le gain en décibel (1 Bel=10 Décibel) en définissant : $G_{dB} = 10\log\left(\frac{P_s}{P_e}\right)$. Si la puissance en sortie est 10 fois plus grande que la puissance en entrée, $G_{dB} = 10$, si c'est 1000 fois plus grande alors $G_{dB} = 30$.
Comme la puissance est proportionnelle à U^2_{max} ou à I^2_{max}, on obtient la définition donnée précédemment :
$G_{dB} = 10\log\left(\frac{P_s}{P_e}\right) = 10\log\left(\frac{U^2_{smax}}{U^2_{emax}}\right) = 20\log\left(\frac{U_{smax}}{U_{emax}}\right)$

Décade et échelle logarithmique

La pulsation varie sur plusieurs ordres de grandeur. Pour pouvoir représenter correctement le gain et la phase, on utilise une échelle logarithmique en abscisse.
On mesure alors sur l'axe non pas la pulsation mais **le logarithme de la pulsation**.



L'axe des abscisses est gradué en décade : quand on se déplace d'une décade (le logarithme de la pulsation augmente d'1 unité), la pulsation est **multipliée** par 10.

Pulsation réduite

On peut mettre en abscisse une grandeur proportionnelle à ω et **sans dimension** appelée **pulsation réduite**.

Exemple : $\underline{H} = \dfrac{1}{1 + jRC\omega}$

2. Diagramme de Bode asymptotique

Exemple : $\underline{H} = \dfrac{1}{1 + jRC\omega}$

Bande passante à -3 dB

La bande passante est l'intervalle de pulsation (ou de fréquence) $[\omega_1, \omega_2]$ tel que pour tout $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$, on a

$$|H(\omega)| \geq \frac{H_{max}}{\sqrt{2}}$$

On définit les pulsations de coupure ω_c aux bords de la bande passante telles que : $|H(\omega_c)| = \dfrac{H_{max}}{\sqrt{2}}$

Pourquoi dit-on bande passante à -3dB ?

Exemple : $\underline{H} = \dfrac{1}{1 + jRC\omega}$

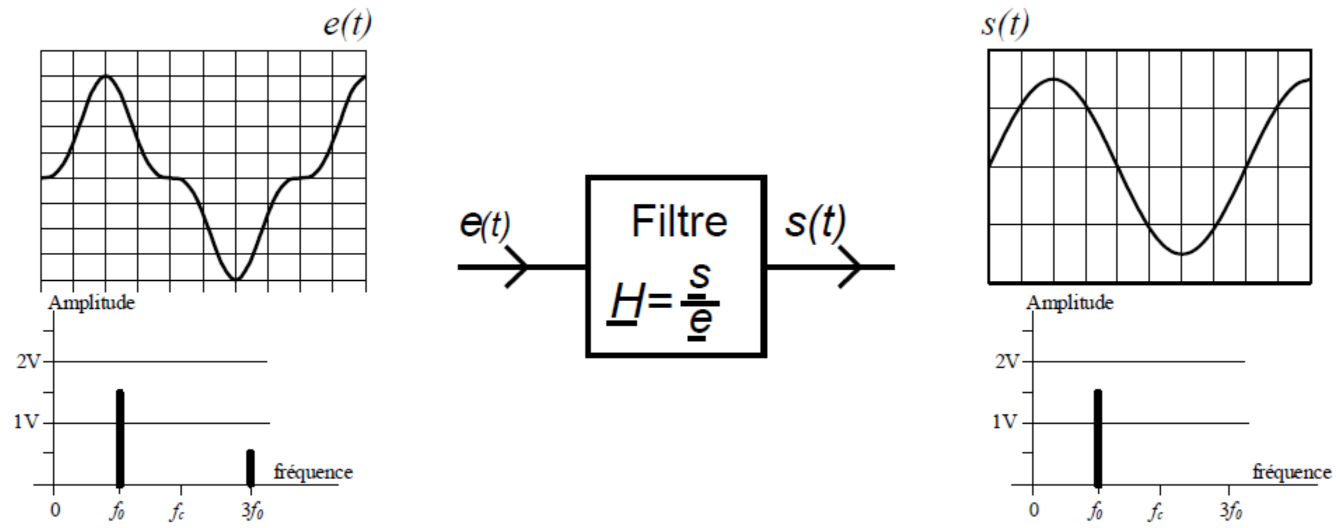
Etude graphique

Etude analytique

3. Application

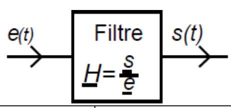
On étudie l'effet de l'opérateur décrit par la fonction de transfert $\underline{H} = \dfrac{1}{1 + jRC\omega}$ sur un signal d'entrée de la forme $e(t) = 2\cos^3(2\pi f_0 t)$.

Etude qualitative



$e(t)$ est la somme de deux fonctions sinusoïdales. D'après le théorème de superposition, le signal de sortie $s(t)$ sera la somme des réponses à chacune de ces fonctions.

$e(t) = 1{,}5\cos(2\pi f_0 t) + 0{,}5\cos[3(2\pi f_0 t)]$



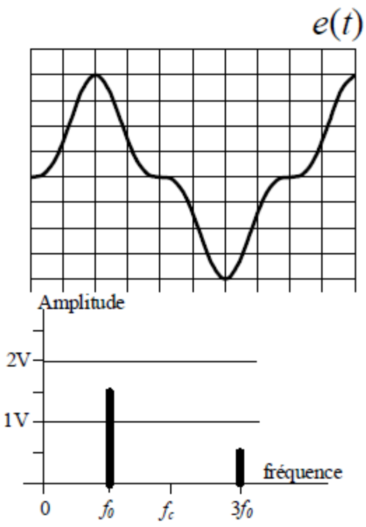
$s(t)$

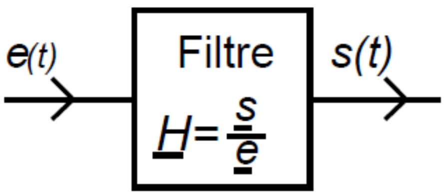
$e_1(t) = 1{,}5\cos(2\pi f_0 t)$	$s_1(t)$ fréquence f_0
$e_2(t) = 0{,}5\cos[3(2\pi f_0 t)]$	$s_2(t)$ fréquence $3f_0$
$e(t) = e_1(t) + e_2(t)$	$s(t) = s_1(t) + s_2(t)$

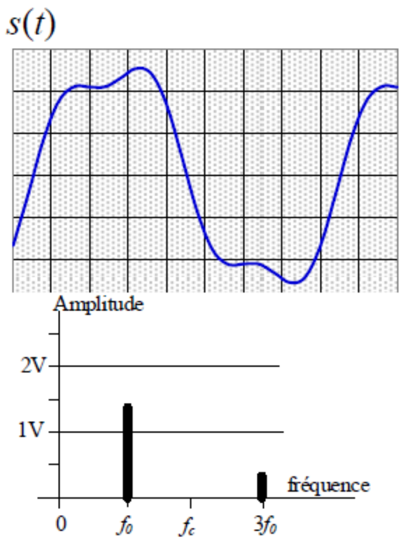
Etude quantitative : on choisit $f_c = 2f_0$

	Entrée		Transfert			Sortie	
Fréquence	Amplitude	Phase à l'origine	$\underline{H}$	$\lvert\underline{H}\rvert$	$Arg(\underline{H})$	Amplitude	Phase à l'origine
$f_0 = \frac{f_c}{2}$							
$3f_0 = \frac{3f_c}{2}$							

Finalement, on peut donner l'expression de $s(t)$







IV. Différents types de fonction de transfert

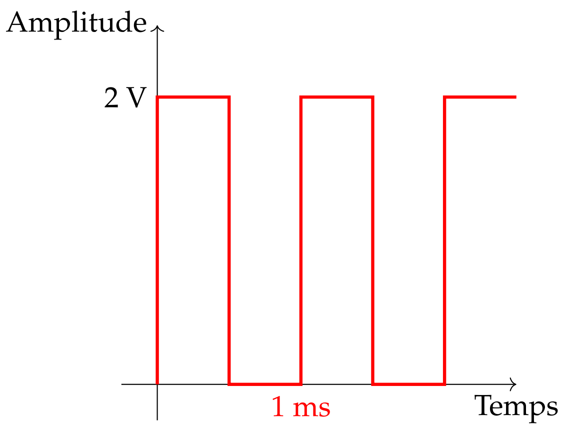
Après l'étude exhaustive d'un exemple de filtre passe-bas du premier ordre, en annexe sont représentés les diagrammes de Bode des fonctions de transfert les plus courantes. On peut distinguer :

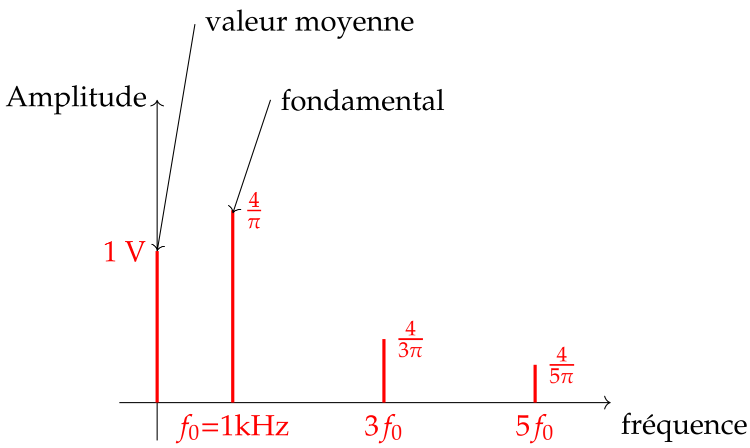
- les quatre types de filtre : passe-bas, passe-haut, passe-bande, réjecteur ;
- les filtres du premier ordre et les filtres du deuxième ordre. Plus l'ordre du filtre augmente, plus les pentes des courbes de gain sont grandes, et le filtrage plus efficace.

V. Conception d'un filtre

1. Position du problème

La conception d'un filtre résulte d'un cahier des charges : Quelles fréquences doivent être transmises ? avec quelle atténuation maximale ? Quelles fréquences doivent être coupées ? avec quelle atténuation minimale ?
De ces caractéristiques du filtre découle son **gabarit**. On en déduit l'atténuation minimale en dB par décade ; la fréquence propre ou la fréquence de coupure ; éventuellement le facteur de qualité.
Vient ensuite la phase de réalisation : quel est l'ordre du filtre ?
Voyons la méthode sur un exemple. Le signal étudié est un créneau [0 V ; 2 V] de fréquence 1 kHz.





Notre problématique : Quel filtre doit-on réaliser pour extraire le fondamental seul, sans atténuation ?

Evidemment, avec des filtres réels, le fondamental est atténué. Il nous faut donc fixer une atténuation maximale en deçà de laquelle on considérera que le fondamental est transmis sans atténuation. Notre choix : *Le fondamental ne doit pas être atténué par le filtre, de plus de 3 dB.*
De même, les harmoniques ne sont pas annulées, mais atténuées. Il nous faut donc fixer une amplitude maximale en deçà de laquelle on considérera que l'harmonique n'est pas transmise. Notre choix : *L'amplitude de l'harmonique doit être, en sortie du filtre, au plus égale à 5% de l'amplitude du fondamental.*

2. Filtrage des harmoniques

Cahier des charges

- Le fondamental (H1) ne doit pas être atténué par le filtre, de plus de 3 dB.
- L'amplitude des harmoniques (H2, H3 ...) doit être, en sortie du filtre, au plus égale à 5% de l'amplitude du fondamental.

On remplit le tableau pour les amplitudes de H0 (valeur moyenne), H1 (fondamental) et H3 (première harmonique non nulle).

		Entrée	Transfert		Sortie
	Fréquence	Amplitude	G_{dB}	$\lvert\underline{H}\rvert$	Amplitude
H0	0				
H1	$f_0 = 1$ kHz				
H3	$3f_0 = 3$ kHz				

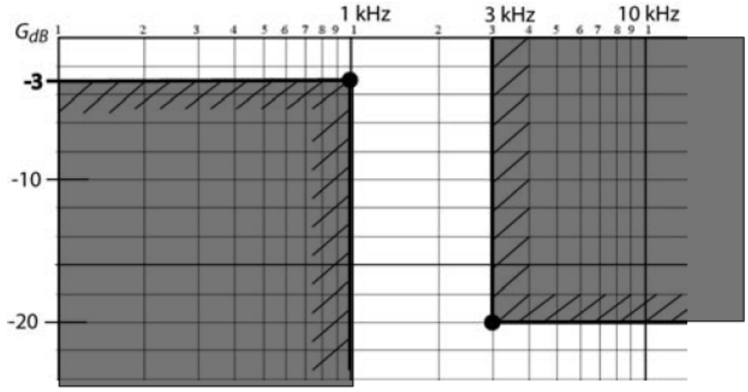
Commentaires :

Le cahier des charges est vierge pour la composante continue H0.

3. Gabarit du filtre

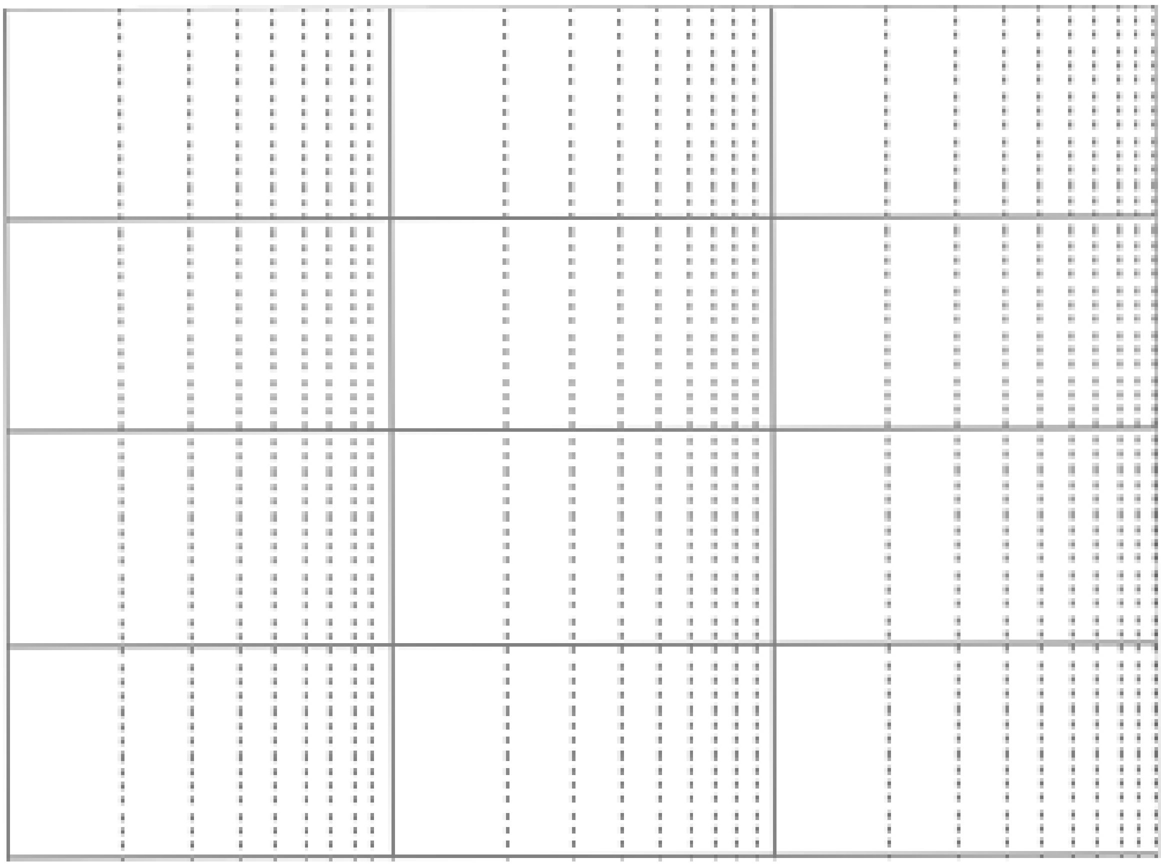
Le filtre à réaliser a un diagramme de Bode limité par deux surfaces (grisées sur le schéma) présentant chacune un sommet :

- Dernière fréquence passante : f_p ; Gain minimal dans la bande passante : G_p.
  Ici [f_p ;G_p] = [1 kHz ; -3 dB]
- Première fréquence coupée : f_c ; Gain maximal dans la bande coupée : G_c.
  Ici [f_c ;G_c] = [3 kHz ; -20 dB]



La courbe en gain de la fonction de transfert doit passer par la zone non grisée du diagramme.

4. Exploitation du Gabarit



Commentaires sur la construction :

5. Conception du montage