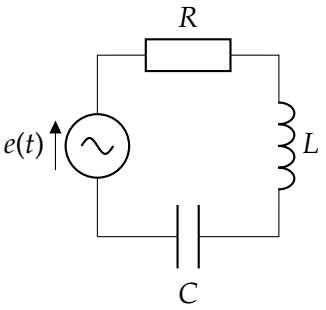
Chapitre 4 - Réseaux linéaires en régime sinusoïdal forcé



Objectifs du chapitre

Présenter les notions et les méthodes propres à l'étude des réseaux linéaires fonctionnant en régime sinusoïdal forcé.

Nous traiterons le cas du dipôle RLC série, qui ne constitue qu'un exemple d'application.
L'excitation e(t) est imposée par un générateur de f.e.m. sinusoïdale :

$$e(t) = E_{max}\ \cos(\omega t)$$

LE COURANT ALTERNATIF

Bien que rudimentaires, les piles étaient, au début du 19ème siècle, les seules sources pratiques de courant électrique entretenu. Vers 1870, la dynamo devint d'utilisation courante. Et le courant continu était la forme préférée de l'électricité. Le courant alternatif n'était encore qu'une curiosité de laboratoire. A cette époque, l'invention par Edison de l'ampoule à incandescence moderne conduisit au développement de l'utilisation de l'énergie électrique en courant continu. Il fallut alors envisager la construction de centrales électriques à plus grande distance des lieux de consommation. Mais utiliser le courant continu sous une tension de 110 V pour transporter l'énergie électrique entraînait des pertes par effet Joule trop importantes.

Par exemple, une ville moyenne a besoin d'une puissance de 10 MW. Si celle-ci est apportée sous une tension de 100 V, il faut un courant dans les lignes d'intensité $I = \frac{10^7}{100} = 10^5$ A.

Les pertes par effet Joule étant égales à $R.I^2$ (où R est la résistance de la ligne électrique), c'est un facteur 10^{10} qui apparaît dans l'évaluation de celles-ci.

La solution consiste à élever la tension au niveau de la centrale électrique, à transporter l'énergie électrique sous haute tension, puis à abaisser la tension électrique sur le lieu de consommation. En effet, augmenter la tension d'un facteur 10^3 (de 100 V à 100 kV) diminue l'intensité dans les lignes d'un facteur 10^3, et les pertes Joule de 10^6 ! L'appareil permettant de telles modifications de tension est le transformateur, alors connu depuis plusieurs dizaines d'années. Le problème est qu'il ne fonctionne qu'avec des tensions alternatives. C'est Nikola Tesla qui, aux Etats-Unis, à la suite d'une âpre rivalité commerciale avec Edison, finit par imposer le courant alternatif face au courant continu. En 1900, la norme était au transport de l'énergie électrique sous haute tension alternative.

I. Les grandeurs alternatives sinusoïdales

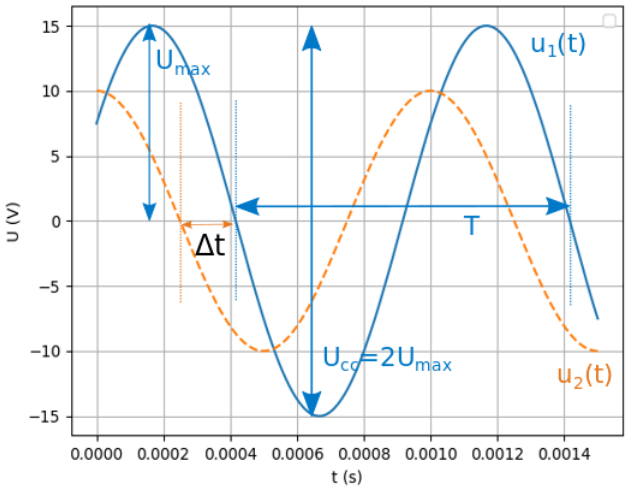
Un signal sinusoïdal $u(t)$ est caractérisé par trois grandeurs :

- son amplitude U_{max} (ou sa tension crête à crête $U_{cc} = 2\,U_{max}$).
- sa période T (ou sa fréquence $f = \frac{1}{T}$ ou sa pulsation $\omega = 2\,\pi\,f$)
- sa phase à l'origine ϕ (valeur de la phase en t=0).

L'écriture la plus générale d'un signal sinusoïdal est :

$$u(t) = U_{max}\cos(\omega t + \phi)$$

Comme on se place en régime permanent, toutes les grandeurs (tensions et intensités dans le circuit) ont la même pulsation ω.
$\omega\,t + \phi$ est aussi appelée la *phase instantanée* du signal.



Les deux signaux de la figure ci-contre s'écrivent :

$$u_1(t) = U_1\,\cos(\omega t + \phi_1)$$

$$u_2(t) = U_2\,\cos(\omega t + \phi_2)$$

U_1 et U_2 sont les amplitudes des tensions u_1 et u_2, respectivement et ϕ_1 et ϕ_2 sont les phases à l'origine des tensions u_1 et u_2, respectivement.

On définit le déphasage de la tension u_2 **par rapport** à la tension u_1 comme : $\boxed{\varphi = \phi_2 - \phi_1}$

Graphiquement, le déphasage correspond à un décalage temporel Δt entre les deux tensions. On peut retrouver le déphasage en mesurant Δt et en utilisant la relation : $\boxed{|\varphi| = 2\pi\frac{\Delta t}{T}}$ où T est la période du signal.

On calcule ainsi la valeur absolue de φ. Pour connaitre son signe, il faut regarder quelle tension est en avance ou en retard.

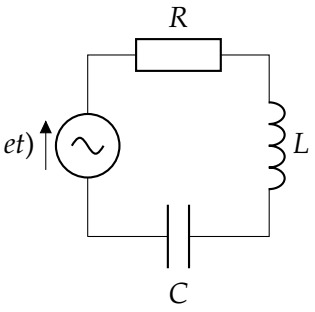
- si u_2 est en avance sur u_1, alors $\varphi = \phi_2 - \phi_1 > 0$.
- si u_2 est en retard sur u_1, alors $\varphi = \phi_2 - \phi_1 < 0$.

Sur la figure, u_2 (en pointillé) est en avance sur u_1, donc $\varphi = \phi_2 - \phi_1 > 0$.

On peut **choisir** une des deux tensions comme **origine des phases**. *Par exemple*, si u_1 est choisie, on pourra écrire $\phi_1 = 0$, et alors, $\varphi = \phi_2$.

Calcul de la valeur moyenne d'un signal sinusoïdal : $$< u(t) >= \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\mathrm{d}t$$

II. Le régime sinusoïdal forcé

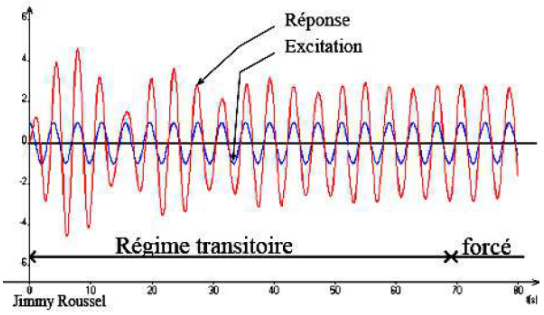


Intéressons-nous à l'établissement du régime sinusoïdal dans le montage RLC présenté au début du chapitre. Avant la connexion du générateur, toutes les grandeurs électriques sont nulles.

En connectant le générateur, on applique une tension sinusoïdale $e(t) = E_{max}\cos(\omega t + \phi_e)$; les grandeurs électriques ne deviennent pas instantanément sinusoïdales.

Un régime transitoire d'une durée égale à quelques périodes précède le régime permanent, appelé régime sinusoïdal forcé (forcé, car imposé par le générateur).

C'est ce qui apparaît sur le chronogramme (représentation en fonction du temps) ci-contre. L'excitation $e(t)$ (bleu) est sinusoïdale dès la fermeture de l'interrupteur, mais la réponse $s(t)$ (rouge) ne devient périodique sinusoïdale de même pulsation ω qu'après un régime transitoire.



Dans ce cours, on n'étudiera pas les réseaux en régime transitoire, mais directement en régime sinusoïdal forcé.

En régime permanent, si l'excitation est sinusoïdale, la réponse sera sinusoïdale de même pulsation : c'est le régime sinusoïdal forcé.

1. Intérêt du régime sinusoïdal forcé

- Intérêt pratique : La tension du secteur est sinusoïdale (tension efficace 230 V ; fréquence 50 Hz). Voir l'introduction
- Théorème de Fourier :

Tout signal périodique $s(t)$ de fréquence f est développable en série de Fourier, c'est à dire peut s'écrire sous la forme d'une somme de fonction sinusoïdales :

$$s(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k\cos(2\pi f_k\, t) + B_k\sin(2\pi f_k\, t)$$

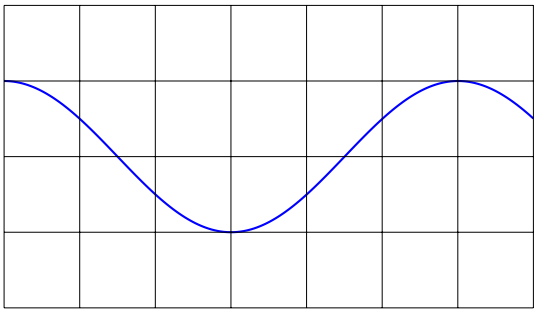
$$s(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k\cos(2\pi f_k\, t + \phi_k)$$

$s(t)$ est la somme d'un signal continu A_0 et de fonctions sinusoïdales de fréquences $f, 2f, ..., nf$.
A_0 est la **valeur moyenne** de $s(t)$.
Les termes $A_k \cos(2\pi k\, ft + \phi_k)$ s'appellent les **harmoniques** de $s(t)$. La première harmonique $A_1 \cos(2\pi\, ft + \phi_1)$ s'appelle la fondamentale de $s(t)$. La fondamentale de $s(t)$ a même fréquence f que la fonction périodique $s(t)$.

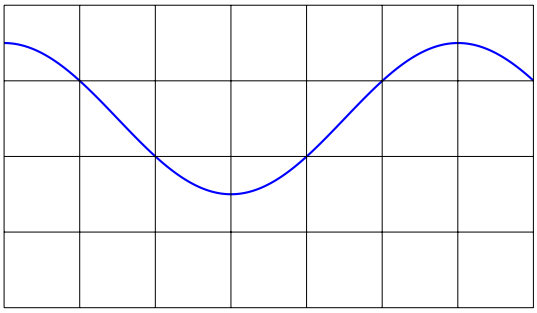
Application pratique : Connaitre la réponse d'un système à une excitation sinusoïdale permet aussi de connaitre immédiatement la réponse de ce même système à toute excitation périodique (somme d'excitations sinusoïdales) grâce au principe de superposition.

2. Spectre d'un signal

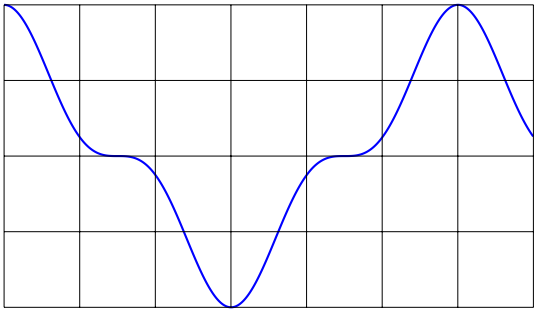
Tout signal périodique est donc une somme de termes sinusoïdaux. On peut décrire ce signal en traçant son spectre.



$e(t) = \cos(2\pi f_0\, t)$



$e(t) = 0,5 + \cos(2\pi f_0\, t)$



$e(t) = 2\cos^3(2\pi f_0\, t)$

III. Représentation complexe d'une grandeur alternative sinusoïdale

Soit une tension sinusoïdale : $u(t) = U_{max}\cos(\omega t + \phi)$.
La **représentation complexe** de cette grandeur est :

$$\underline{u}(j\omega\, t) = U_{max}\, e^{j(\omega t+\phi)}$$

On différencie la grandeur réelle de la grandeur complexe en **soulignant** la grandeur complexe. Le nombre j est défini tel que $j^2 = -1$.

Comme tout nombre complexe, $\underline{u}(t)$ est caractérisé par deux nombres :

- sa partie réelle et sa partie imaginaire :

- son module et son argument :

Deux méthodes pour revenir à la grandeur réelle à partir de la grandeur complexe

- On calcule la partie réelle de la grandeur complexe : $u(t) = \mathfrak{Re}\left(\underline{u}(j\omega\, t)\right)$.
- On calcule le module $U_{max} = |\underline{u}(t)|$ et l'argument $\omega\, t+\phi = Arg\left(\underline{u}(t)\right)$ et on en déduit $u(t) = U_{max}\cos(\omega t+\phi)$.

En physique, on utilise les grandeurs complexes car elles permettent de transformer les équations différentielles en équations linéaires.

Propriété	Grandeur instantanée réelle		Sa représentation complexe
La transformation est linéaire :	$\lambda_1 a_1(t) + \lambda_2 a_2(t)$	$\rightarrow$	$\lambda_1 \underline{a}_1(\mathrm{j}\omega t) + \lambda_2 \underline{a}_2(\mathrm{j}\omega t)$
Dériver par rapport au temps, c'est multiplier par $\mathrm{j}\omega$:	$\frac{da}{dt}$	$\rightarrow$	$\mathrm{j}\omega \underline{a}(\mathrm{j}\omega t)$
Intégrer par rapport au temps, c'est diviser par $\mathrm{j}\omega$:	$\int a(t).dt$	$\rightarrow$	$\frac{\underline{a}(\mathrm{j}\omega t)}{\mathrm{j}\omega}$

Lois de Kirchhoff en représentation complexe

En utilisant la propriété de linéarité de la transformation, on peut écrire :

$$\sum_k \epsilon_k \, i_k(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_k \epsilon_k \, \underline{i}_k(t) = 0$$
$$\sum_k \epsilon_k \, u_k(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_k \epsilon_k \, \underline{u}_k(t) = 0$$

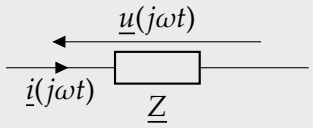
Les lois de Kirchhoff ont même forme en représentation complexe qu'en grandeurs instantanées réelles.

IV. Impédance complexe

Les lois de Kirchhoff sont utilisables en représentation complexe. On peut aussi généraliser la loi d'Ohm en représentation complexe pour les dipôles linéaires.

1. Définitions

En convention récepteur



Impédance complexe : $\underline{Z} = \dfrac{\underline{u}(j\omega t)}{\underline{i}(j\omega t)}$

Propriétés de l'impédance complexe

On peut écrire l'impédance complexe $\underline{Z} = R + jX$. La partie réelle R (en Ohm) est la *résistance* et la partie imaginaire X (en Ohm) est la *réactance*.

On peut calculer le module et l'argument de $\underline{Z}$:

Module et argument de l'impédance complexe :

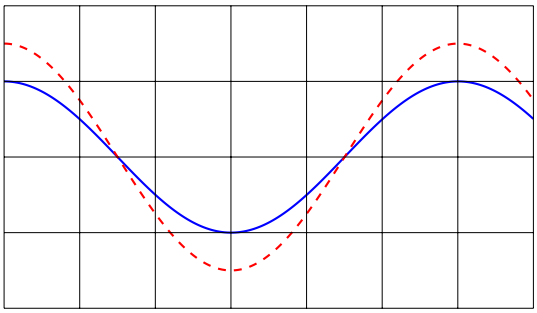
- $Z = |\underline{Z}| = \dfrac{U_{max}}{I_{max}}$
- $Arg\left(\underline{Z}\right) = Arg(\underline{u}) - Arg(\underline{i}) = \phi_u - \phi_i$

On peut aussi définir l'**admittance complexe** : $\underline{Y} = \frac{\underline{i}}{\underline{u}}$
L'admittance complexe peut s'écrire sour la forme : $\underline{Y} = G + jB$. la partie réelle G (en Siemens) est la *conductance* et la partie imaginaire B (en Siemens) est la *susceptance*.
On pourrait aussi calculer le module et l'arguement de l'admittance complexe si nécessaire.

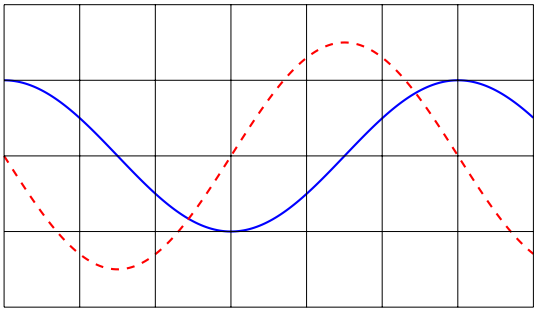
2. Impédance complexe des dipôles modèles passifs

On trace ci-dessous la tension aux bornes du dipôle en trait plein et l'intensité qui le traverse en pointillé.

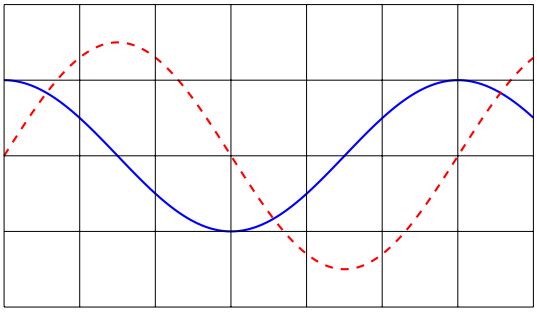
Résistance



Condensateur



Bobine



	$\underline{Z}$	Module $\lvert\underline{Z}\rvert$	$Arg\left(\underline{Z}\right)$
Résistance	R	R	0
Condensateur	$\frac{1}{jC\omega}$	$\frac{1}{C\omega}$	$-\frac{\pi}{2}$
Bobine	$jL\omega$	$L\omega$	$+\frac{\pi}{2}$

3. Association d'impédance en série

Les impédances complexes ont les mêmes propriétés que les résistances. Si N impédances $\underline{Z}_k$ sont associées en série, alors on peut définir une impédance équivalente $\underline{Z}_{eq}$:

$$\underline{Z}_{eq} = \sum_{k=1}^{N} \underline{Z}_k$$

Exemple : on associe une résistance, un condensateur et une bobine en série.

⚠**Les impédances ne s'ajoutent pas. Seuls les impédances *complexes* s'ajoutent.**

4. Association d'impédances en parallèles

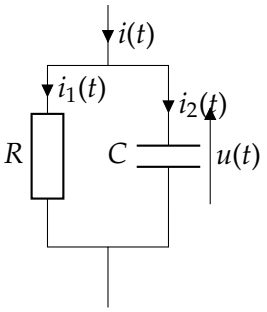
Si N impédances $\underline{Z}_k$ sont associées en parallèle, alors on peut définir une impédance équivalente $\underline{Z}_{eq}$:

$$\boxed{\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\underline{Z}_k}}$$

On peut écrire la même propriété avec les admittances complexes : $\boxed{\underline{Y}_{eq} = \sum_{k=1}^{N} \underline{Y}_k}$.

Exemple : on associe une résistance, un condensateur et une bobine en parallèle.

Exemple : modèle du condensateur basse-fréquence



Le courant alimentant un condensateur a pour intensité $i(t) = 6.10^{-3}\cos(100\pi t)$ (en A).
On prend $R = 2$ kΩ et $C = 1,5\mu$F.
Déterminer l'équation horaire de $u(t)$, $i_1(t)$ et $i_2(t)$.

Réponse :

$u(t) = 8,7\cos(100\pi t – 0,24\pi)$ (en V)
$i_1(t) = 4,4.10^{-3}\cos(100\pi t – 0,24\pi)$ (en A) (courant de fuite)
$i_2(t) = 4,1.10^{-3}\cos(100\pi t + 0,26\pi)$ (en A) (courant de charge)

On remarque que $I_{1max} + I_{2max} \neq I_{max}$. Les amplitudes ne s'ajoutent pas. La loi des noeuds n'est valide qu'en représentation complexe.

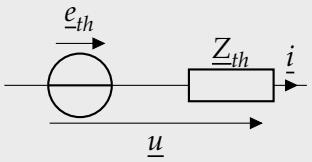
5. Etude des réseaux linéaires

Les lois et théorèmes vus en grandeurs instantanées sont également valables en représentation complexe.

Equivalence Thévenin-Norton en représentation complexe

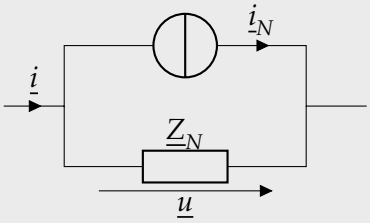
Equivalence Thévenin-Norton

Modèle de Thévenin



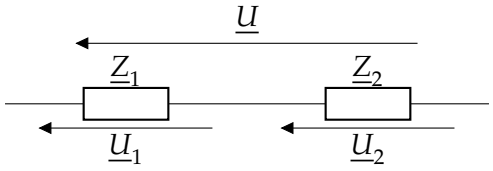
$$\underline{e}_{th}=\underline{Z}_N\,\underline{i}_N \iff \underline{Z}_{th}=\underline{Z}_N$$

Modèle de Norton



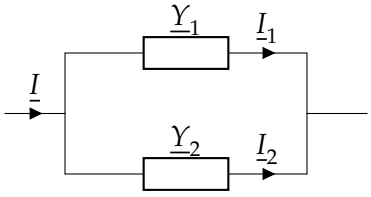
Ponts Diviseurs

Pont diviseur de tension :



$$\underline{U}_1 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\underline{U} \qquad \underline{U}_2 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\underline{U}.$$

Pont diviseur de courant :



$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}\underline{I} \qquad \underline{I}_2 = \frac{\underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}\underline{I}.$$