

# Chapitre 4 - Réseaux linéaires en régime sinusoïdal forcé

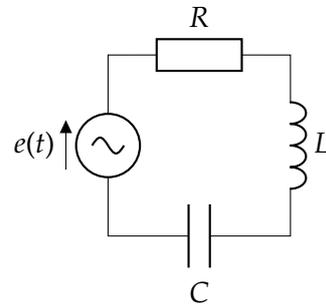
## Objectifs du chapitre

Présenter les notions et les méthodes propres à l'étude des réseaux linéaires fonctionnant en régime sinusoïdal forcé.

Nous traiterons le cas du dipôle RLC série, qui ne constitue qu'un exemple d'application.

L'excitation  $e(t)$  est imposée par un générateur de f.e.m. sinusoïdale :

$$e(t) = E_{max} \cos(\omega t)$$



## LE COURANT ALTERNATIF

Bien que rudimentaires, les piles étaient, au début du 19<sup>ème</sup> siècle, les seules sources pratiques de courant électrique entretenues. Vers 1870, la dynamo devint d'utilisation courante. Et le courant continu était la forme préférée de l'électricité. Le courant alternatif n'était encore qu'une curiosité de laboratoire. A cette époque, l'invention par Edison de l'ampoule à incandescence moderne conduisit au développement de l'utilisation de l'énergie électrique en courant continu. Il fallut alors envisager la construction de centrales électriques à plus grande distance des lieux de consommation. Mais utiliser le courant continu sous une tension de 110 V pour transporter l'énergie électrique entraînait des pertes par effet Joule trop importantes.

Par exemple, une ville moyenne a besoin d'une puissance de 10 MW. Si celle-ci est apportée sous une tension de 100 V, il faut un courant dans les lignes d'intensité  $I = \frac{10^7}{100} = 10^5$  A.

Les pertes par effet Joule étant égales à  $R.I^2$  (où R est la résistance de la ligne électrique), c'est un facteur  $10^{10}$  qui apparaît dans l'évaluation de celles-ci.

La solution consiste à élever la tension au niveau de la centrale électrique, à transporter l'énergie électrique sous haute tension, puis à abaisser la tension électrique sur le lieu de consommation. En effet, augmenter la tension d'un facteur  $10^3$  (de 100 V à 100 kV) diminue l'intensité dans les lignes d'un facteur  $10^3$ , et les pertes Joule de  $10^6$  ! L'appareil permettant de telles modifications de tension est le transformateur, alors connu depuis plusieurs dizaines d'années. Le problème est qu'il ne fonctionne qu'avec des tensions alternatives. C'est Nikola Tesla qui, aux Etats-Unis, à la suite d'une âpre rivalité commerciale avec Edison, finit par imposer le courant alternatif face au courant continu. En 1900, la norme était au transport de l'énergie électrique sous haute tension alternative.

# I. Les grandeurs alternatives sinusoïdales

Un signal sinusoïdal  $u(t)$  est caractérisé par trois grandeurs :

- son amplitude  $U_{max}$  (ou sa tension crête à crête  $U_{cc} = 2 U_{max}$ ).
- sa période  $T$  (ou sa fréquence  $f = \frac{1}{T}$  ou sa pulsation  $\omega = 2 \pi f$ )
- sa phase à l'origine  $\phi$  (valeur de la phase en  $t=0$ ).

L'écriture la plus générale d'un signal sinusoïdal est :

$$u(t) = U_{max} \cos(\omega t + \phi)$$

Comme on se place en régime permanent, toutes les grandeurs (tensions et intensités dans le circuit) ont la même pulsation  $\omega$ .

$\omega t + \phi$  est aussi appelée la *phase instantanée* du signal.

Les deux signaux de la figure ci-contre s'écrivent :

$$u_1(t) = U_1 \cos(\omega t + \phi_1)$$

$$u_2(t) = U_2 \cos(\omega t + \phi_2)$$

$U_1$  et  $U_2$  sont les amplitudes des tensions  $u_1$  et  $u_2$ , respectivement et  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont les phases à l'origine des tensions  $u_1$  et  $u_2$ , respectivement.

On définit le déphasage de la tension  $u_2$  **par rapport** à la tension  $u_1$  comme :  $\varphi = \phi_2 - \phi_1$

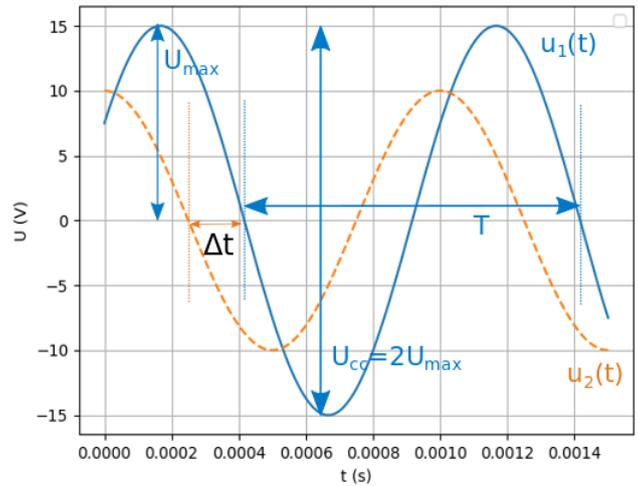
Graphiquement, le déphasage correspond à un décalage temporel  $\Delta t$  entre les deux tensions. On peut retrouver le déphasage en mesurant  $\Delta t$  et en utilisant la relation :  $|\varphi| = 2\pi \frac{\Delta t}{T}$  où  $T$  est la période du signal.

On calcule ainsi la valeur absolue de  $\varphi$ . Pour connaître son signe, il faut regarder quelle tension est en avance ou en retard.

- si  $u_2$  est en avance sur  $u_1$ , alors  $\varphi = \phi_2 - \phi_1 > 0$ .
- si  $u_2$  est en retard sur  $u_1$ , alors  $\varphi = \phi_2 - \phi_1 < 0$ .

Sur la figure,  $u_2$  (en pointillé) est en avance sur  $u_1$ , donc  $\varphi = \phi_2 - \phi_1 > 0$ .

On peut **choisir** une des deux tensions comme **origine des phases**. Par exemple, si  $u_1$  est choisie, on pourra écrire  $\phi_1 = 0$ , et alors,  $\varphi = \phi_2$ .



Calcul de la valeur moyenne d'un signal sinusoïdal :

$$\langle u(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt$$

## II. Le régime sinusoïdal forcé

### Représentation complexe d'une grandeur alternative sinusoïdale

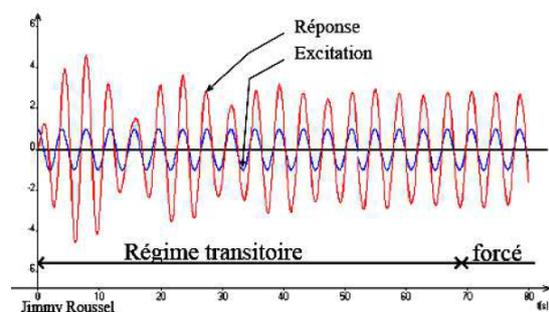
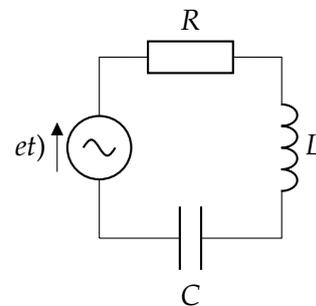
Intéressons-nous à l'établissement du régime sinusoïdal dans le montage RLC présenté au début du chapitre. Avant la connexion du générateur, toutes les grandeurs électriques sont nulles.

En connectant le générateur, on applique une tension sinusoïdale  $e(t) = E_{max} \cos(\omega t + \phi_e)$ ; les grandeurs électriques ne deviennent pas instantanément sinusoïdales.

Un régime transitoire d'une durée égale à quelques périodes précède le régime permanent, appelé régime sinusoïdal forcé (forcé, car imposé par le générateur).

C'est ce qui apparaît sur le chronogramme (représentation en fonction du temps) ci-contre. L'excitation  $e(t)$  (bleu) est sinusoïdale dès la fermeture de l'interrupteur, mais la réponse  $s(t)$  (rouge) ne devient périodique sinusoïdale de même pulsation  $\omega$  qu'après un régime transitoire.

Dans ce cours, on n'étudiera pas les réseaux en régime transitoire, mais directement en régime sinusoïdal forcé.



En régime permanent, si l'excitation est sinusoïdale, la réponse sera sinusoïdale de même pulsation : c'est le régime sinusoïdal forcé.

Dans la suite du cours, on va toujours se placer en régime permanent avec des excitations sinusoïdales et donc étudier seulement des signaux sinusoïdaux. Pour résoudre ces problèmes, il est nécessaire de représenter ces signaux avec des nombres complexes.

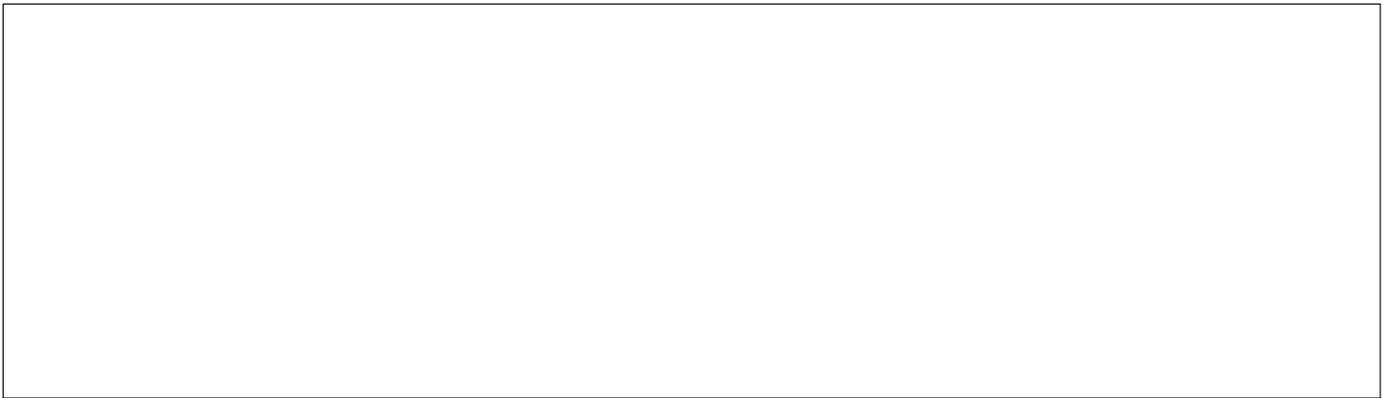
Soit une tension sinusoïdale :  $u(t) = U_{max} \cos(\omega t + \phi)$ .

La **représentation complexe** de cette grandeur est :

$$\underline{u}(j\omega t) = U_{max} e^{j(\omega t + \phi)}$$

On différencie la grandeur réelle de la grandeur complexe en **soulignant** la grandeur complexe. Le nombre  $j$  est défini tel que  $j^2 = -1$ .





Propriété	Grandeur instantanée réelle		Sa représentation complexe
La transformation est linéaire :	$\lambda_1 a_1(t) + \lambda_2 a_2(t)$	→	$\lambda_1 \underline{a}_1(j\omega t) + \lambda_2 \underline{a}_2(j\omega t)$
Dériver par rapport au temps, c'est multiplier par $j\omega$ .	$\frac{da}{dt}$	→	$j\omega \underline{a}(j\omega t)$
Intégrer par rapport au temps, c'est diviser par $j\omega$ .	$\int a(t).dt$	→	$\frac{\underline{a}(j\omega t)}{j\omega}$

### Lois de Kirchhoff en représentation complexe

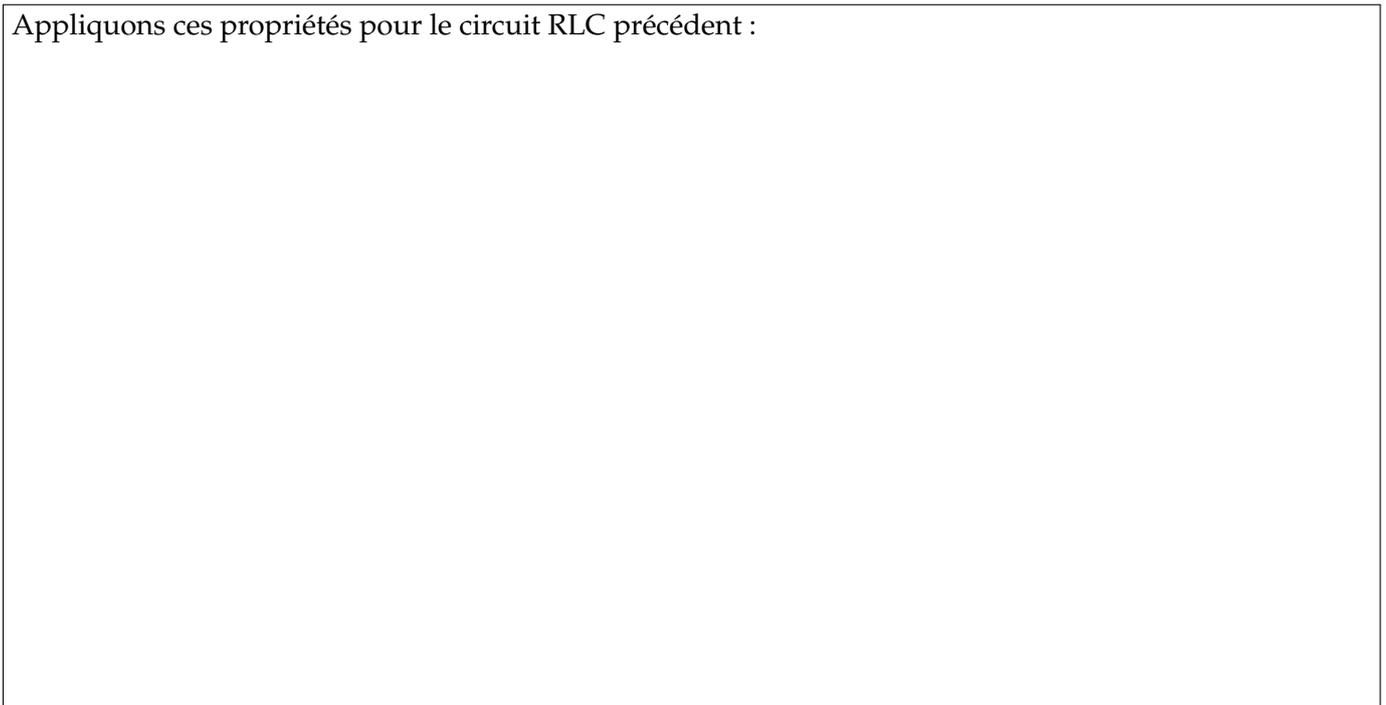
En utilisant la propriété de linéarité de la transformation, on peut écrire :

$$\sum_k \epsilon_k i_k(t) = 0 \Rightarrow \sum_k \epsilon_k \underline{i}_k(t) = 0$$

$$\sum_k \epsilon_k u_k(t) = 0 \Rightarrow \sum_k \epsilon_k \underline{u}_k(t) = 0$$

Les lois de Kirchhoff ont même forme en représentation complexe qu'en grandeurs instantanées réelles.

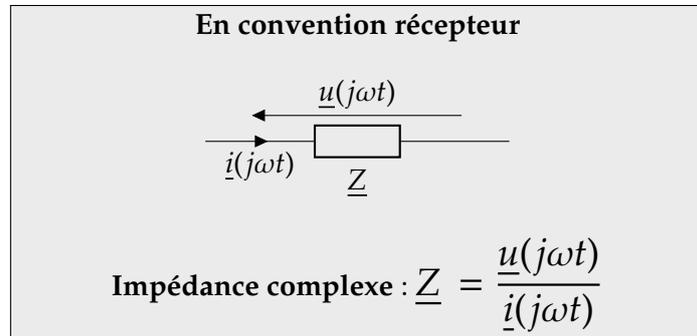
Appliquons ces propriétés pour le circuit RLC précédent :



### III. Impédance complexe

Les lois de Kirchhoff sont utilisables en représentation complexe. On peut aussi généraliser la loi d'Ohm en représentation complexe pour les dipôles linéaires.

#### 1. Définitions



#### Propriétés de l'impédance complexe

On peut écrire l'impédance complexe  $\underline{Z} = R + jX$ . La partie réelle  $R$  (en Ohm) est la *résistance* et la partie imaginaire  $X$  (en Ohm) est la *réactance*.

On peut calculer le module et l'argument de  $\underline{Z}$  :

Module et argument de l'impédance complexe :

- $Z = |\underline{Z}| = \frac{U_{max}}{I_{max}}$
- $Arg(\underline{Z}) = Arg(\underline{u}) - Arg(\underline{i}) = \phi_u - \phi_i$

On peut aussi définir l'**admittance complexe** :  $\underline{Y} = \frac{i}{u}$

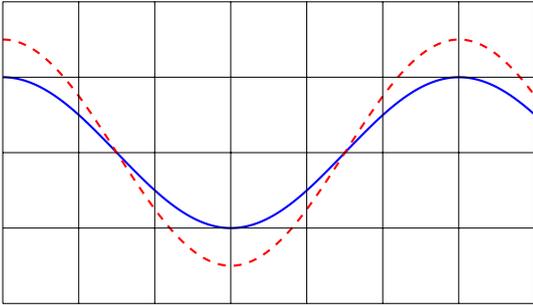
L'admittance complexe peut s'écrire sous la forme :  $\underline{Y} = G + jB$ . la partie réelle  $G$  (en Siemens) est la *conductance* et la partie imaginaire  $B$  (en Siemens) est la *susceptance*.

On pourrait aussi calculer le module et l'argument de l'admittance complexe si nécessaire.

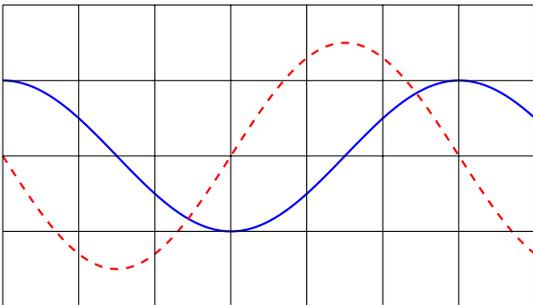
## 2. Impédance complexe des dipôles modèles passifs

On trace ci-dessous la tension aux bornes du dipôle en trait plein et l'intensité qui le traverse en pointillé.

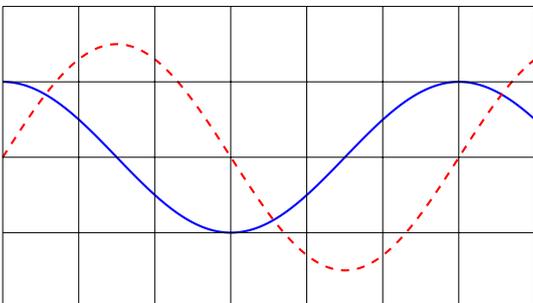
### Résistance



### Condensateur



### Bobine



	$\underline{Z}$	Module $ \underline{Z} $	$Arg(\underline{Z})$
Résistance	R	R	0
Condensateur	$\frac{1}{jC\omega}$	$\frac{1}{C\omega}$	$-\frac{\pi}{2}$
Bobine	$jL\omega$	$L\omega$	$+\frac{\pi}{2}$

### 3. Association d'impédance en série

Les impédances complexes ont les mêmes propriétés que les résistances. Si  $N$  impédances  $\underline{Z}_k$  sont associées en série, alors on peut définir une impédance équivalente  $\underline{Z}_{eq}$  :

$$\underline{Z}_{eq} = \sum_{k=1}^N \underline{Z}_k$$

**Exemple** : on associe une résistance, un condensateur et une bobine en série.

⚠ Les impédances ne s'ajoutent pas. Seuls les impédances *complexes* s'ajoutent.

#### 4. Association d'impédances en parallèles

Si  $N$  impédances  $\underline{Z}_k$  sont associées en parallèle, alors on peut définir une impédance équivalente  $\underline{Z}_{eq}$  :

$$\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\underline{Z}_k}$$

On peut écrire la même propriété avec les admittances complexes :  $\underline{Y}_{eq} = \sum_{k=1}^N \underline{Y}_k$ .

**Exemple** : on associe une résistance, un condensateur et une bobine en parallèle.

#### Exemple : modèle du condensateur basse-fréquence

Le courant alimentant un condensateur a pour intensité  $i(t) = 6.10^{-3} \cos(100\pi t)$  (en A).

On prend  $R = 2 \text{ k}\Omega$  et  $C = 1,5\mu\text{F}$ .

Déterminer l'équation horaire de  $u(t)$ ,  $i_1(t)$  et  $i_2(t)$ .

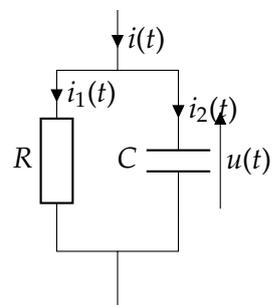
Réponse :

$u(t) = 8,7 \cos(100\pi t - 0,24\pi)$  (en V)

$i_1(t) = 4,4.10^{-3} \cos(100\pi t - 0,24\pi)$  (en A) (courant de fuite)

$i_2(t) = 4,1.10^{-3} \cos(100\pi t + 0,26\pi)$  (en A) (courant de charge)

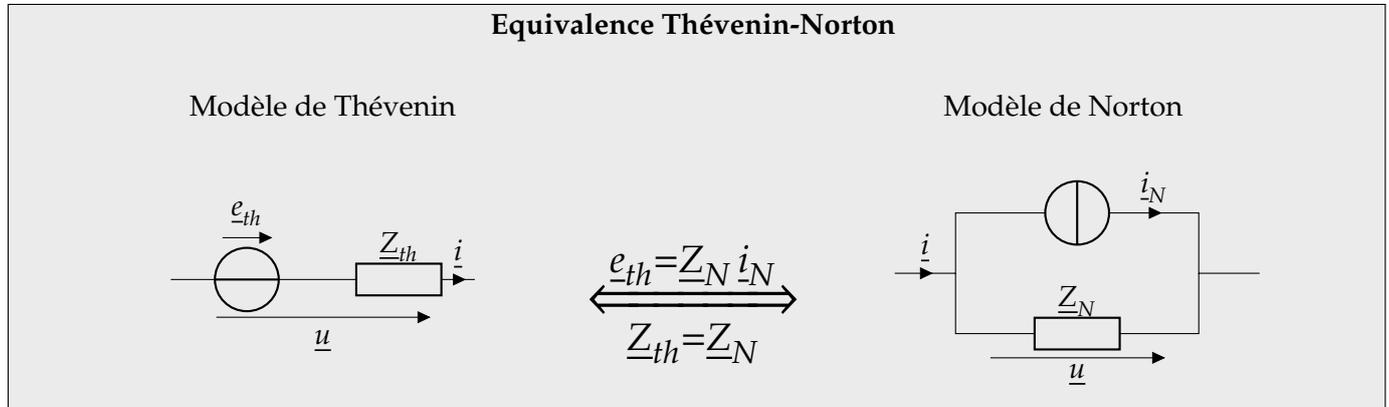
On remarque que  $I_{1max} + I_{2max} \neq I_{max}$ . Les amplitudes ne s'ajoutent pas. La loi des noeuds n'est valide qu'en représentation complexe.



### 5. Etude des réseaux linéaires

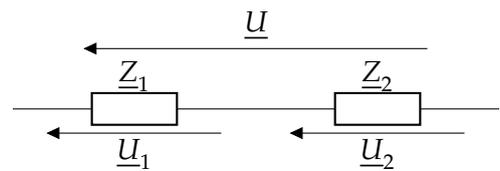
Les lois et théorèmes vus en grandeurs instantanées sont également valables en représentation complexe.

#### Equivalence Thévenin-Norton en représentation complexe



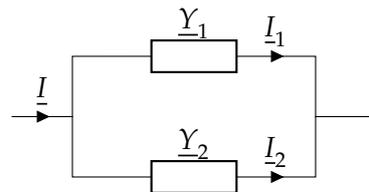
#### Ponts Diviseurs

Pont diviseur de tension :



$$U_1 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} U \quad U_2 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} U.$$

Pont diviseur de courant :



$$I_1 = \frac{Y_1}{Y_1 + Y_2} I \quad I_2 = \frac{Y_2}{Y_1 + Y_2} I.$$