Chapitre 2 -Réseaux linéaires

Objectifs du chapitre

Nous avons déjà rencontré des résistances et des générateurs de tension. Comment déterminer expérimentalement leurs propriétés ? Et comment déterminer le comportement d'un dipôle inconnu ? A quelle condition ce dipôle pourra-t-il être considéré linéaire ? Une fois connues les propriétés des composants mobilisés, nous les associerons dans des circuits. Nous avons vu que, pour prévoir le comportement d'un réseau, on peut appliquer les lois de Kirchhoff. Mais si ce réseau est linéaire, des théorèmes spécifiques peuvent être avantageusement mis en oeuvre. Nous en présenterons quelques-uns dans ce chapitre.

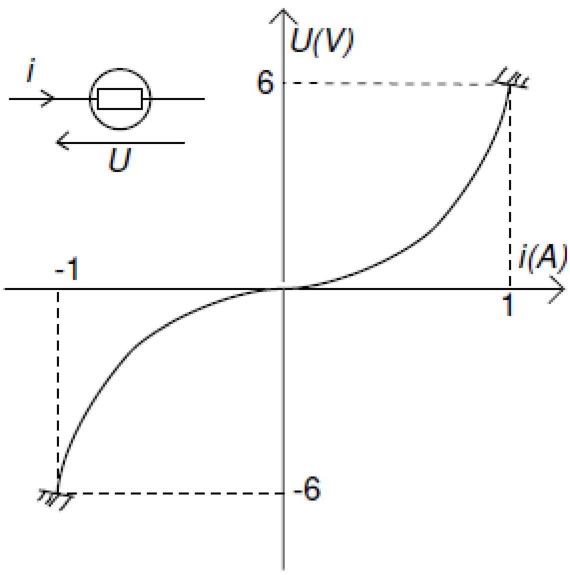
I. Etude expérimentale des propriétés d'un dipôle

1. Caractéristique d'un dipôle

On cherche à déterminer le comportement électrique d'une petite ampoule de lampe-torche. Quelles mesures faut-il effectuer ?

Il faut en fait déterminer si le comportement de la lampe est le même dans les deux sens de connexion ; et quelle intensité la traverse quand on applique telle tension à ses bornes. Mais aussi dans quelles limites on peut augmenter la tension sans détériorer la lampe. Pour ce dernier point, précisons tout de suite que la solution consiste à lire les données constructeur si on tient à conserver son composant...

Par exemple, si l'inscription sur l'ampoule est (6 V ; 1 A), cela signifie qu'elle est conçue pour fonctionner sous une tension de 6 V ; et qu'alors elle sera traversée par un courant de 1 A. Au-delà de 6 V, la lampe s'use prématurément. Le montage à réaliser est représenté ci-dessous, et la courbe obtenue est dans le premier quadrant. En retournant le dipôle dans le montage, la tension et l'intensité changent de signe, et on obtient la courbe du troisième quadrant. **Cette courbe U(i) est la caractéristique du dipôle**. On peut y déterminer l'essentiel de ses propriétés.



Caractéristique de la lampe :
ensemble des points de fonctionnement du dipôle

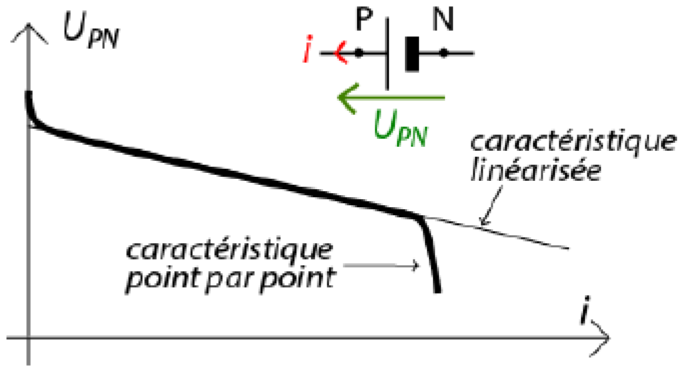
L'ampèremètre se branche en série
Le voltmètre se branche en parallèle

Pour la lampe,

- la caractéristique passe par l'origine : pas de tension à ses bornes quand elle est débranchée.
- la caractéristique n'est pas une portion de droite : pas de relation linéaire entre tension et intensité. On dit que la lampe n'est pas un dipôle linéaire.
- la caractéristique présente une symétrie centrale : même comportement électrique pour les deux sens de connexion.

2. Caractéristique d'un générateur

On suit la même démarche pour déterminer le comportement électrique d'un générateur, par exemple une pile. On trace donc sa caractéristique, qu'on analysera. Le montage à réaliser est représenté ci-dessous. En faisant varier R, l'intensité varie, et on relève les valeurs correspondantes de la tension. On obtient point par point la courbe représentée en gras.



Pour la pile,

- La tension aux bornes de la pile chute quand elle débite du courant. C'est à vide (quand elle est débranchée) que la tension est la plus grande.
- Au-delà d'une certaine intensité débitée, la tension chute brutalement.

Linéarisation du dipôle

La pile n'est pas un dipôle linéaire, mais la caractéristique présente une grande portion rectiligne. On peut donc définir, à partir du comportement réel de la pile, un modèle linéaire de celle-ci.

La caractéristique linéarisée d'une pile peut s'écrire :

En convention générateur

$$U_{PN} = E - r \cdot i$$

E : ordonnée à l'origine ; c'est la **force électromotrice** du générateur

-r : coefficient directeur ; r est la **résistance interne** du générateur

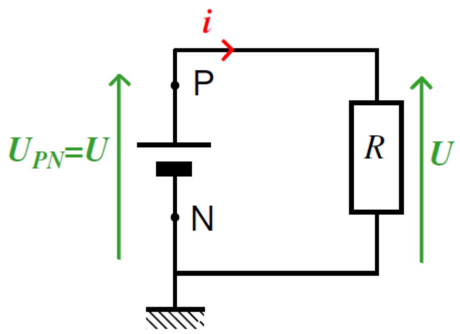
La présence d'un effet résistif (résistance r) dans la pile s'interprète comme une dissipation d'énergie électrique par effet Joule ; ce qui se traduit par une chute de tension quand la pile débite. Si c'était un générateur parfait, il n'y aurait pas d'effet Joule, et la tension serait égale à la force électromotrice, quelque soit l'intensité débitée.
Le modèle linéarisé de la pile, constitué d'un générateur de tension parfait en serie avec la résistance interne de la pile est appelé **modèle de Thévenin** de la pile.

II. Point de fonctionnement d'un réseau élémentaire

Si on connait les propriétés des dipôles, comment prévoir leur comportement (intensités, tensions) quand on les connecte les uns aux autres ? On branche par exemple la pile étudiée précédemment, et une résistance R connue.

1. Méthode graphique

Pour une résistance, tension et intensité sont proportionnelles, le coefficient directeur étant R. La caractéristique est donc une portion de droite passant par l'origine. On note au passage qu'une résistance est un dipôle linéaire. On trouvera donc le point de fonctionnement F du réseau en traçant les deux caractéristiques sur le même graphe. F n'est autre que le point d'intersection des deux courbes.



2. Méthode analytique

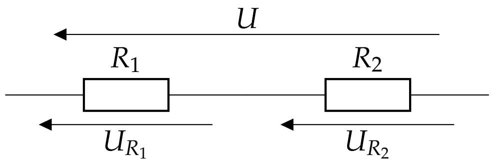
Une autre méthode, utilisable ici, consiste à linéariser la pile. Elle est alors caractérisée par sa force électromotrice E et sa résistance interne r.

III. Quelques théorèmes relatifs aux réseaux linéaires

Les réseaux linéaires se prêtent bien aux résolutions algébriques. Voici des théorèmes qui en simplifient l'étude.

1. Ponts diviseurs

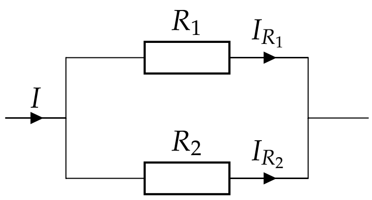
Pont diviseur de tensions : Démontrer que l'on a $U_{R_1} = \frac{R_1}{R_1+R_2}U$ et $U_{R_2} = \frac{R_2}{R_1+R_2}U$.



Généralisation à N résistances en série : la tension aux bornes de la résitance R_n s'écrit :

$$U_{R_n} = \frac{R_n}{\sum_{i=1}^{N} R_i}U$$

Pont diviseur de courant : Démontrer que l'on a $I_{R_1} = \frac{G_1}{G_1+G_2}I$ et $I_{R_2} = \frac{G_2}{G_1+G_2}I$.



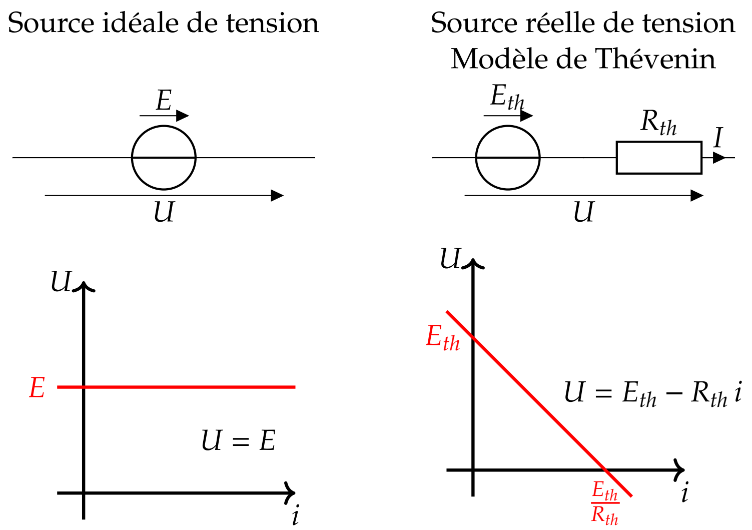
Généralisation à N résistances en parallèle : l'intensité traversant la résitance R_n s'écrit :

$$I_{R_n} = \frac{G_n}{\sum_{i=1}^{N} G_i}I$$

2. Equivalence Thévenin-Norton

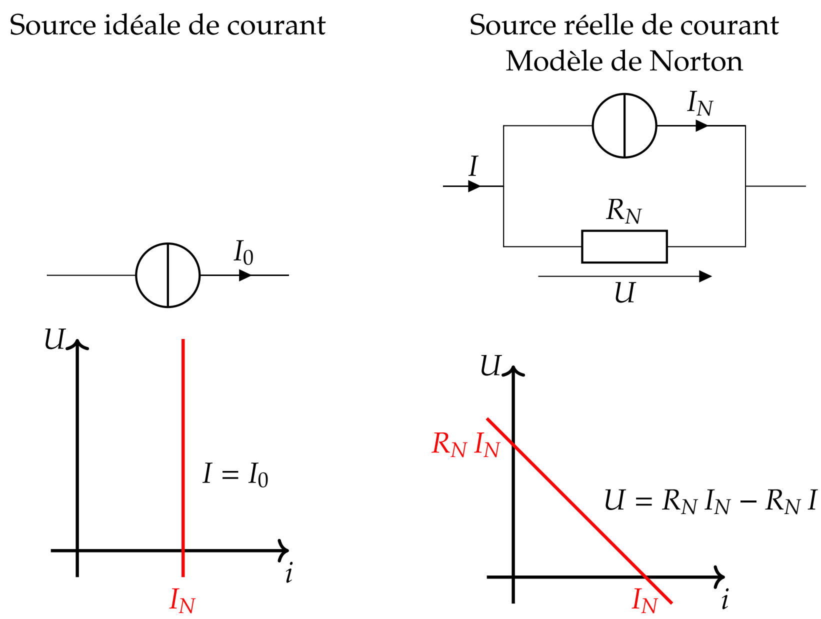
Source idéale et source réelle de tension - Modèle de Thévenin

On a déjà vu que le générateur de tension idéal impose une tension constante à ses bornes quelque soit l'intensité qu'il débite. Un générateur réel a une tension qui varie avec l'intensité. Il peut être modélisé par un modèle de Thévenin : une source idéale de tension E_{th} en série avec une résistance R_{th}.



Source idéale et source réelle de courant - Modèle de Norton

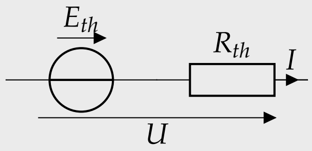
De même, un générateur idéal de courant délivre un courant constant quelque soit la tension à ses bornes. Un générateur réel peut aussi être modélisé par un modèle de Norton : une source idéal de courant I_N en parallèle avec une résistance R_N.



On remarque avec les caractéristiques que les deux modèles sont équivalents et peuvent représenter le même dipôle. On peut donc passer sans problèmes d'un modèle à l'autre en écrivant $R_{th} = R_N$ et $E_{th} = R_N\, I_N$.
Chercher le modèle équivalent de Thévenin d'un dipôle revient à déterminer E_{th} et R_{th}.
Chercher le modèle équivalent de Norton d'un dipôle revient à déterminer I_N et R_N.

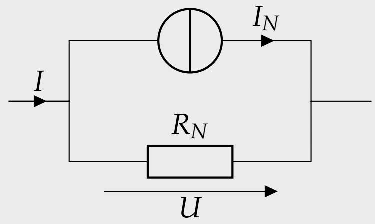
Equivalence Thévenin-Norton

Modèle de Thévenin



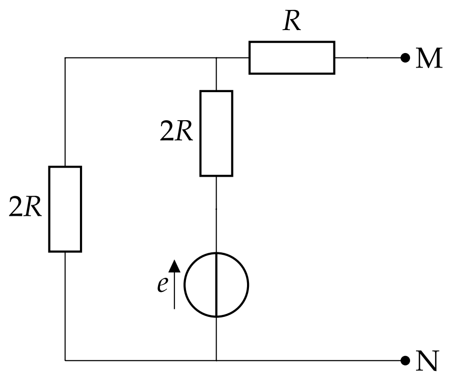
$$E_{th} = R_N I_N \iff R_{th} = R_N$$

Modèle de Norton



Démonstration

Exemple : déterminer le générateur de Thévenin équivalent du dipôle (MN) ci-dessous :



3. Théorème de superposition

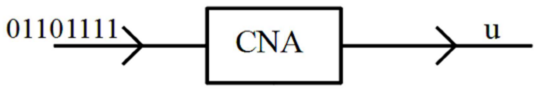
Dans un réseau linéaire contenant plusieurs sources, l'intensité qui parcourt chaque dipôle, et la tension à leurs bornes, sont les sommes de ces grandeurs dues à chaque source, supposée seule (on éteint les autre sources).

Comme énoncé au chapitre 1 :

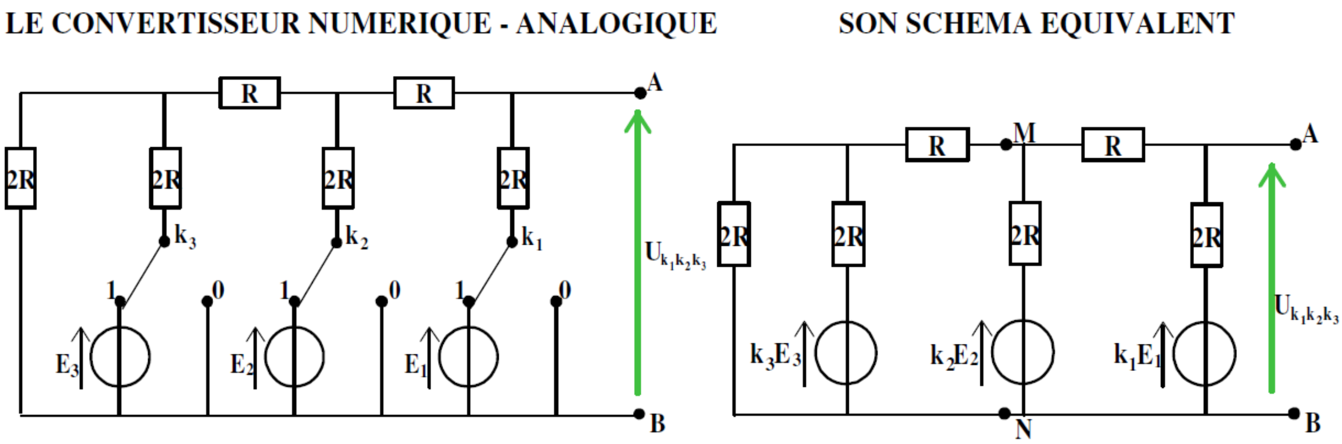
- lorsqu'on éteint une source de tension, on la remplace par un fil ($U = 0$)
- lorsqu'on éteint une source de courant, on la remplace par un interrupteur ouvert ($i = 0$)

<u>Application du théorème de superposition</u> : Convertisseur Numérique-Analogique

Un convertisseur numérique - analogique (CNA) est un système qui convertit un signal binaire (type octet) en un signal analogique (signal électrique continument variable).



Le schéma ci-dessous représente un montage possible de CNA.



Pour calculer la tension U_{k1k2k3} aux bornes du CNA, on étudie le circuit successivement en allumant une seule des trois sources. Quand $k = 0$, l'interrupteur est ouvert (source non connectée), quand $k = 1$, l'interrupteur est fermé (source connectée). On obtient trois tensions U_{001} (source 3 connectée), U_{010} (source 2 connectée) et U_{100} (source 1 connectée).

Finalement, $U_{k1k2k3} = U_{001} + U_{010} + U_{100}$.

Le détail de la démarche est disponible sur moodle.