

Loi normale

Jourd'huy

Loi normale

Jourd'huy

25 décembre 2023

Propriétés

Soient X une variable aléatoire et $(m; \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$:

- X suit $\mathcal{N}(m; \sigma^2) \Leftrightarrow X^* = \frac{X - m}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0; 1)$

Propriétés

Soient X une variable aléatoire et $(m; \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$:

- X suit $\mathcal{N}(m; \sigma^2) \Leftrightarrow X^* = \frac{X - m}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0; 1)$
- Dans ce cas, si F est la fonction de répartition de X alors $F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$ avec Φ la fonction de répartition de X^*

Propriétés

Soient X une variable aléatoire et $(m; \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$:

- X suit $\mathcal{N}(m; \sigma^2) \Leftrightarrow X^* = \frac{X - m}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0; 1)$
- Dans ce cas, si F est la fonction de répartition de X alors $F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$ avec Φ la fonction de répartition de X^*
- $\forall x \in \mathbb{R}, \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

Propriétés

Soient X une variable aléatoire et $(m; \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$:

- X suit $\mathcal{N}(m; \sigma^2) \Leftrightarrow X^* = \frac{X - m}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0; 1)$
- Dans ce cas, si F est la fonction de répartition de X alors $F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$ avec Φ la fonction de répartition de X^*
- $\forall x \in \mathbb{R}, \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

Exemple

Soit X une variable aléatoire suivant $\mathcal{N}(32; 100)$

- $P(30 \leq X < 56, 5)$

Propriétés

Soient X une variable aléatoire et $(m; \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$:

- X suit $\mathcal{N}(m; \sigma^2) \Leftrightarrow X^* = \frac{X - m}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0; 1)$
- Dans ce cas, si F est la fonction de répartition de X alors $F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$ avec Φ la fonction de répartition de X^*
- $\forall x \in \mathbb{R}, \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

Exemple

Soit X une variable aléatoire suivant $\mathcal{N}(32; 100)$

- $P(30 \leq X < 56, 5) = P(X \leq 56, 5) - P(X \leq 30)$
 $P(30 \leq X < 56, 5) = F_X(56, 5) - F_X(30)$

Propriétés

Soient X une variable aléatoire et $(m; \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$:

- X suit $\mathcal{N}(m; \sigma^2) \Leftrightarrow X^* = \frac{X - m}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0; 1)$
- Dans ce cas, si F est la fonction de répartition de X alors $F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$ avec Φ la fonction de répartition de X^*
- $\forall x \in \mathbb{R}, \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

Exemple

Soit X une variable aléatoire suivant $\mathcal{N}(32; 100)$

- $P(30 \leq X < 56, 5) = P(X \leq 56, 5) - P(X \leq 30)$
 $P(30 \leq X < 56, 5) = F_X(56, 5) - F_X(30)$
 $P(30 \leq X < 56, 5) = \Phi\left(\frac{56,5-32}{\sqrt{100}}\right) - \Phi\left(\frac{30-32}{\sqrt{100}}\right)$
 $P(30 \leq X < 56, 5) = \Phi(2, 45) - \Phi(-0, 2)$

Exemple

- $\Phi(2,45) = 0,9929$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0.00	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199
0.10	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596
0.20	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987
0.30	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368
0.40	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422
0.70	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734
0.80	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023
0.90	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289
1.00	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531
1.10	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749
1.20	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944
1.30	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115
1.40	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265
1.50	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394
1.60	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505
1.70	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599
1.80	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678
1.90	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744
2.00	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798
2.10	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842
2.20	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878
2.30	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906
2.40	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929

Exemple

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0.00	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199
0.10	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596
0.20	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987
0.30	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368
0.40	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422
0.70	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734
0.80	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023
0.90	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289
1.00	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531
1.10	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749
1.20	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944
1.30	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115
1.40	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265
1.50	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394
1.60	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505
1.70	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599
1.80	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678
1.90	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744
2.00	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798
2.10	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842
2.20	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878
2.30	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906
2.40	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929

- $\Phi(2,45) = 0,9929$

- $\Phi(-0,2) = 1 - \Phi(0,2) = 1 - 0,5793 = 0,4207$

x	0.00
0.00	0.5000
0.10	0.5398
0.20	0.5793

Exemple

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0.00	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199
0.10	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596
0.20	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987
0.30	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368
0.40	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422
0.70	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734
0.80	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023
0.90	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289
1.00	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531
1.10	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749
1.20	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944
1.30	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115
1.40	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265
1.50	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394
1.60	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505
1.70	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599
1.80	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678
1.90	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744
2.00	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798
2.10	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842
2.20	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878
2.30	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906
2.40	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929

- $\Phi(2,45) = 0,9929$

x	0.00
0.00	0.5000
0.10	0.5398
0.20	0.5793

- $\Phi(-0,2) = 1 - \Phi(0,2) = 1 - 0,5793 = 0,4207$
- $P(30 \leq X < 56,5) = 0,9929 - 0,4207 = 0,5722$

Exemple

Soit X une variable aléatoire suivant $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ telle que $P(X \leq 5) = 0,7019$ et $P(X \leq 10) = 0,8554$.
Calculer m et σ .

Exemple

Soit X une variable aléatoire suivant $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ telle que $P(X \leq 5) = 0,7019$ et $P(X \leq 10) = 0,8554$.

Calculer m et σ .

$$\text{On a } \begin{cases} P(X \leq 5) = 0,7019 \\ P(X \leq 10) = 0,8554 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Phi\left(\frac{5-m}{\sigma}\right) = 0,7019 \\ \Phi\left(\frac{10-m}{\sigma}\right) = 0,8554 \end{cases}$$

Exemple

Soit X une variable aléatoire suivant $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ telle que $P(X \leq 5) = 0,7019$ et $P(X \leq 10) = 0,8554$.

Calculer m et σ .

$$\text{On a } \begin{cases} P(X \leq 5) = 0,7019 \\ P(X \leq 10) = 0,8554 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Phi\left(\frac{5-m}{\sigma}\right) = 0,7019 \\ \Phi\left(\frac{10-m}{\sigma}\right) = 0,8554 \end{cases}$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03
0.00	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120
0.10	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517
0.20	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910
0.30	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293
0.40	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019

Donc $\frac{5-m}{\sigma} = 0,53$

Exemple

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.00	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239
0.10	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636
0.20	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026
0.30	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406
0.40	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454
0.70	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764
0.80	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051
0.90	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315
1.00	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554

Donc $\frac{10-m}{\sigma} = 1,06$

Exemple

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.00	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239
0.10	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636
0.20	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026
0.30	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406
0.40	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454
0.70	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764
0.80	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051
0.90	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315
1.00	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554

Donc $\frac{10-m}{\sigma} = 1,06$

$$\begin{cases} P(X \leq 5) = 0,7019 \\ P(X \leq 10) = 0,8554 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5-m}{\sigma} = 0,53 \\ \frac{10-m}{\sigma} = 1,06 \end{cases}$$

Exemple

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.00	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239
0.10	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636
0.20	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026
0.30	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406
0.40	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454
0.70	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764
0.80	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051
0.90	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315
1.00	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554

Donc $\frac{10-m}{\sigma} = 1,06$

$$\begin{cases} P(X \leq 5) = 0,7019 \\ P(X \leq 10) = 0,8554 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5-m}{\sigma} = 0,53 \\ \frac{10-m}{\sigma} = 1,06 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 5 - m = 0,53\sigma \\ 10 - m\sigma = 1,06\sigma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ \sigma \simeq 9,43 \end{cases}$$