INSA — **EXAMEN DE M3** — Janvier 2017

(durée 3h)

(formulaire fourni, calculette autorisée)

Exercice 1 : (30 mn)

Soit n entier ≥ 2, et $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires indépendantes, de même loi, de densité commune f définie par : $f(x)=\frac{1}{x^2}$ si $x\geq 1$ et 0 sinon.

1) Etudiez l'existence de $E(X_i)$ et $V(X_i)$.
2) Soit $Y=\min\limits_{1\leq i\leq n} X_i$. Montrez que Y a une densité (pour cela, on déterminera d'abord la fonction de répartition F_Y de Y). Etudiez l'existence de E(Y).

Exercice 2 : (30 mn)

On suppose que la distance en mètres parcourue par un javelot suit une loi normale. Au cours d'un entrainement on constate que : 10% des javelots atteignent plus de 75 mètres et 25% des javelots parcourent moins de 50 mètres. On considère alors que $P(X\geq 75)\simeq 0.1$ et $P(X\leq 50)\simeq 0.25$. Calculez la longueur moyenne parcourue par un javelot ainsi que l'écart-type de cette longueur.

Exercice 3 : (15 min)

Soit X et Y deux variables aléatoires finies, indépendantes. Montrez que $E(XY)=E(X)E(Y)$. Que peut-on dire de la réciproque ?

Exercice 4 : (1 h)

Un étudiant fréquente deux cybercafés C_A et C_B.

Dans C_A il paye deux euros la première demi-heure, puis 1 euro pour la demi-heure suivante si elle entamée, puis 3 euros par heure supplémentaire entamée.

Dans C_B il paye R euros par heure entamée (R désignant une constante strictement positive).

Par exemple pour une session de 1h40, il paiera 2+1+3 euros dans C_A contre 2 R euros dans C_B. De même pour une session de 32 minutes, il paiera 2+1 euros dans C_A contre R euros dans C_B. Enfin pour une session de 30 minutes, il paiera 2 euros dans C_A contre R euros dans C_B.

On suppose que la durée, exprimée en heures, passée par un étudiant sur un ordinateur au cours d'une session unique est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\alpha>0$.

1) Calculez la fonction de répartition de la loi de T.

2) Soit B la variable aléatoire égale au coût de la session dans le cybercafé C_B.

a) Déterminez l'ensemble image $B(\Omega)$ (ensemble des valeurs prises par B).

b) Montrez que $P(B=kR)=P(k-1<T\leq k)$. En déduire que pour tout entier naturel k non nul, $P(B=kR)=e^{-\alpha(k-1)}(1-e^{-\alpha})$.

c) Quelle est la loi de la variable aléatoire $Z=\frac{1}{R}B$? (reconnaître une loi usuelle). En déduire l'espérance de B.

3) Soit A la variable aléatoire égale au coût de la session dans le cybercafé C_A.

a) Justifiez que $A(\Omega)=\{2\}\cup\{3k;k\in\mathbb{N}^*\}$.

b) Calculez $P(A=2)$ et $P(A=3)$.

c) Montrez que pour tout entier naturel $k\geq 2$, $P(A=3k)=e^{-\alpha(k-1)}(1-e^{-\alpha})$.

d) Calculez $\sum_{k=2}^{+\infty}3ke^{-\alpha(k-1)}(1-e^{-\alpha})$ (utilisez E(Z) du 2) c)) et en déduire que

$$E(A)=e^{-\frac{\alpha}{2}}-1+\frac{3}{1-e^{-\alpha}}.$$

e) On suppose maintenant que $\alpha=2\ln 2$. Quel forfait horaire maximum doit proposer le cybercafé C_B pour concurrencer C_A ? (en euros) (comparez $E(A)$ et $E(B)$).

Exercice 5 : (45 mn)

1) Un central téléphonique effectue n appels vers n correspondants distincts (n entier, $n\geq 2$).

On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p, $p\in\,]0;1[$ et la probabilité de ne pas l'obtenir est $q=1-p$. On note X la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus. Quelle est la loi de X ?

2/ Le lendemain le central téléphonique appelle les correspondants qu'il n'a pas pu obtenir la veille et on appelle Y la variable aléatoire donnant le nombre de correspondants obtenus ce jour là.
On appelle Z la variable aléatoire donnant le nombre de correspondants obtenus. ur les deux jours.

a/ Donner $Z(\Omega)$

b/ Calculer $P(Z = 0)$ et $P(Z = 1)$

c/ Soit $i \in \{0, \ldots, n\}$, donner la loi de Y sachant que $(X = i)$

d/ Soit $k \in \{0, \ldots, n\}$, montrer que $P(Z=k)=\sum_{i=0}^{k} P((X=i)\cap(Y=k-i))$

e/ En déduire que la variable aléatoire Z suit la loi $B(n, p(1+q))$

Ex1) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1) • $E(X_i) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ diverge donc X_i n'a pas d'espérance, on ne peut donc définir sa variance $V(X_i) = E((X_i - E(X_i))$

2) $F_Y(y) = P(\min_{1\leq i\leq n} X_i \leq y) = 1 - P(\min_{1\leq i \leq n} X_i > y) = 1 - P(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i > y))$

$= 1 - (1 - F_X(y))^n$ (car X_i indép, de même loi, on appelera F_X la fdr de la loi commune)

or $F_X(y) = \int_{-\infty}^{y} f(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 1 \\ \int_1^y \frac{1}{x^2}dx & \text{si } y \geq 1 \end{cases} = \boxed{\begin{cases} 0 & \text{si } y < 1 \\ 1 - \frac{1}{y} & \text{si } y \geq 1 \end{cases}}$

d'où $\boxed{F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 1 \\ 1 - \frac{1}{y^n} & \text{si } y \geq 1 \end{cases}}$

F_Y continue sur $\mathbb{R}$, C^1 (sauf peut-être en $y=1$) donc Y a une densité

et $\boxed{f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 1 \\ \frac{n}{y^{n+1}} & \text{si } y > 1 \end{cases}}$

$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\,dy$ si l'intégrale converge

or $\int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\,dy = n \int_1^{+\infty} \frac{1}{y^n}\,dy = n \lim_{X\to+\infty} \left(\int_1^X \frac{1}{y^n}dy\right) = \frac{n}{n-1}$

donc $\boxed{Y \text{ a une espérance et } E(Y) = \frac{n}{n-1}}$

Ex 2)

$$\begin{cases} P(X \geq 75) = 0{,}1 = P\left(X^* \geq \frac{75-m}{\sigma}\right) < 0{,}5 \Rightarrow 75 - m > 0 \\ P(X \leq 50) = 0{,}25 = P\left(X^* \leq \frac{50-m}{\sigma}\right) < 0{,}5 \Rightarrow 50 - m < 0 \end{cases}$$

donc $50 < m < 75$ et $\begin{cases} \phi\left(\frac{75-m}{\sigma}\right) = 0{,}9 \\ \phi\left(\frac{m-50}{\sigma}\right) = 0{,}75 \end{cases}$

d'où avec la table $\begin{cases} \frac{75-m}{\sigma} \simeq 1{,}28 \\ \frac{m-50}{\sigma} = 0{,}67 \end{cases}$ (approximativement)

d'où $\begin{cases} m = 75 - 1{,}28\,\sigma \\ m = 50 + 0{,}67\,\sigma \end{cases}$ et $\boxed{\begin{cases} m \simeq 58{,}59 \\ \sigma \simeq 12{,}82 \end{cases}}$

Ex 3) Démo dans le cours.

Réciproque fausse bien sûr

$\boxed{\text{Ex } 4}$

2) a) $B(\Omega) = \{ k R \text{ où } k \in \mathbb{N}^* \}$

b) $P(B = kR) = P(k-1 < T \leq k) = F_T(k) - F_T(k-1)$

où $F_T(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$ donc $P(B = kR) = e^{-(k-1)\alpha} - e^{-\alpha k}$

$= \boxed{e^{-\alpha(k-1)}(1 - e^{-\alpha})}$

c) $P(Z = k) = P(B = kR) = (e^{-\alpha})^{k-1}(1 - e^{-\alpha})$

$(k \in \mathbb{N}^*)$ d'où $\boxed{Z \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \text{ où } p = 1 - e^{-\alpha}}$

d'où $E(Z) = \dfrac{1}{p} = E\left(\dfrac{1}{R} B\right) \Rightarrow E(B) = \dfrac{R}{p} = \boxed{\dfrac{R}{1 - e^{-\alpha}}}$

3) a) $A(\Omega) = \{2\} \cup \{3k \,;\, k \in \mathbb{N}^*\}$

b) $P(A = 2) = P\left(T \leq \frac{1}{2}\right) = F_T\left(\frac{1}{2}\right) = \boxed{1 - e^{-\alpha/2}}$

$P(A = 3) = P\left(\frac{1}{2} < T \leq 1\right) = F_T(1) - F_T\left(\frac{1}{2}\right) = (1 - e^{-\alpha}) - (1 - e^{-\alpha/2})$

$= \boxed{e^{-\frac{\alpha}{2}} - e^{-\alpha}}$

c) $P(A = 3k) = P(k-1 < T \leq k) = F_T(k) - F_T(k-1)$

$(k \geq 2)$

$= \boxed{e^{-(k-1)\alpha}(1 - e^{-\alpha})}$ (Fait en 1°) b)

d) $E(Z) = \dfrac{1}{p} = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k\, e^{-\alpha(k-1)}(1 - e^{-\alpha}) \Rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} 3k\, e^{-\alpha(k-1)}(1 - e^{-\alpha})$

$= 3\left[\left(\dfrac{1}{p}\right) - (1 - e^{-\alpha})\right]$

$= \boxed{3\left(\dfrac{1}{1 - e^{-\alpha}} - 1 + e^{-\alpha}\right)}$

$E(A) = 2(1 - e^{-\alpha/2}) + 3(e^{-\alpha/2} - e^{-\alpha}) + 3\left(\dfrac{1}{1 - e^{-\alpha}} - 1 + e^{-\alpha}\right)$

$= \boxed{\dfrac{3}{1 - e^{-\alpha}} + e^{-\alpha/2} - 1}$

e) $\alpha = 2\ln 2$ donc $E(A) = \dfrac{3}{1-\frac{1}{4}} - \dfrac{1}{2} = \boxed{\dfrac{7}{2}}$

$$E(B) = \boxed{\dfrac{4R}{3}}$$

$E(B) \leq E(A) \iff \dfrac{4R}{3} \leq \dfrac{7}{2} \iff R \leq \dfrac{21}{8} = \boxed{2{,}625}$

Exercice 5 :

1) répétition n fois d'une épreuve de Bernoulli de paramètre p, de façon indépendantes donc $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)}$.

2) a) $Z(\Omega)=\{0,1,\dots,n\}$

b) $P(Z=0)=P(X=0\cap Y=0)=P(X=0)\cdot P(Y=0\mid X=0)=q^n\cdot q^n=\boxed{q^{2n}}$

$$P(Z=1)=P(X=0)\cdot P(Y=1\mid X=0)+P(X=1)\cdot P(Y=0\mid X=1)$$

$$=\binom{n}{0}p^0q^n\cdot\binom{n}{1}pq^{n-1}+\binom{n}{1}pq^{n-1}\cdot\binom{n-1}{0}p^0q^{n-1}$$

$$=npq^{2n-1}+npq^{2n-2}=\boxed{npq^{2n-2}(1+q)}$$

c) La loi de Y sachant que $(X=i)$ est $\boxed{\mathcal{B}(n-i,p)}$

donc $\boxed{P(Y=j\mid X=i)=\binom{n-i}{j}p^jq^{n-i-j}}$

d) $(Z=k)=\bigcup_{i=0}^{k}\big((X=i)\cap(Y=k-i)\big)$ d'où le résultat.
(événements incompatibles 2 à 2)

e) $$P(Z=k)=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}p^iq^{n-i}\binom{n-i}{k-i}p^{k-i}q^{n-i-(k-i)}$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\binom{n}{k}p^kq^{2n-i-k}=\binom{n}{k}p^kq^{2n-2k}\underbrace{\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}q^{k-i}}_{(1+q)^k}$$

$$=\binom{n}{k}\big(p(1+q)\big)^k\left(q^2\right)^{n-k}$$

et l'on a bien $p(1+q)+q^2=1$ d'où $\boxed{Z\hookrightarrow\mathcal{B}(n,p(1+q))}$