INSA (Octobre 2018)

Interrogation surveillée de M3 (durée 1h30)

(*Calculatrices programmables et graphiques interdites, calculettes autorisées*)

La précision des explications que vous donnerez est très importante pour obtenir la totalité des points de chaque question.

Exercice 1 (15 mn) Questions de cours :

1) Enoncez la formule des probabilités totales.
2) Retrouvez en utilisant la formule du binôme la valeur de l'espérance mathématique E(X) quand la variable aléatoire suit la loi binomiale $B(n,p)$
3) Soit X une va et (a,b) un couple de réels, donnez une autre expression de $E(aX+b)$ et $V(aX+b)$. Montrez la propriété donnée pour $E(aX+b)$ dans le cas où X est une va finie.

Exercice 2 (25 mn)

Un joueur prélève 2 boules simultanément dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. Soit X la variable aléatoire égale au plus petit numéro des 2 boules obtenues et Y le plus grand numéro des 2 boules obtenues.

1) Déterminez l'univers Ω associé à l'expérience. Donnez $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.

2) Calculez $P(X=k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$

3) Calculez $P(Y=k)$ pour tout $k \in Y(\Omega)$. Calculez $E(Y)$ (on utilisera sans démonstration : $\sum_{k=1}^{N} k^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$)

4) Montrez que Y et $n+1-X$ ont même loi. En déduire $E(X)$.

Exercice 3 (25 mn)

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces, d'une urne U contenant initialement 20 boules : 10 boules blanches et 10 boules noires et on dispose de 6 boules blanches et 6 boules noires supplémentaires.

On lance le dé, on note i le numéro sorti, on place dans U (en plus des 20 boules qui y sont déjà) i boules blanches et 6-i boules noires puis on tire au hasard une boule dans U.

Sachant que la boule sortie de U au final est noire, quelle est la probabilité d'avoir obtenu un 4 au dé ?

(introduire les événements utiles et utilisez la formule de Bayes. Les résultats seront donnés sous forme de fraction)

Exercice 4 (25 mn)

Et encore des boules…. !

Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. La boule 1 est jaune, les boules 2 et 3 sont bleues, les boules 4, 5 et 6 sont rouges, les boules 7, 8, 9 et 10 sont vertes. On tire dans l'urne successivement et avec remise 5 boules. On appelle résultat la 5-liste obtenue.

Déterminez le nombre de résultats :

1) en tout.

2) pour lesquels les 5 boules sont toutes de la même couleur.

3) pour lesquels les 4 couleurs apparaissent parmi les 5 boules.

Ex1)

1) Soit $\{A_1, \dots; A_n\}$ système complet d'événements de Ω (avec $\forall i, P(A_i) > 0$). Soit B un événement de Ω alors :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\, P_{A_i}(B).$$

2) $E(X) = np$.

3) $E(aX+b) = aE(X) + b$. $\quad V(aX+b) = a^2 V(X)$

(Démo en cours)

Ex2) 1) Ω est l'ensemble des combinaisons de 2 boules parmi n.

$$X(\Omega) = [\![1; n-1]\!] \qquad Y(\Omega) = [\![2; n]\!]$$

2) Réaliser $(X=k)$ c'est choisir k et une boule de numéro $\geq k+1$.

d'où $\mathrm{card}(X=k) = n-(k+1)+1 = n-k$

La proba étant uniforme sur Ω alors $P(X=k) = \dfrac{n-k}{\binom{n}{2}} = \boxed{\dfrac{2(n-k)}{n(n-1)}}$

3) Réaliser $(Y=k)$ c'est choisir k et une boule de numéro $\leq k-1$.

d'où $\mathrm{card}(Y=k) = k-1$ et $\boxed{P(Y=k) = \dfrac{2(k-1)}{n(n-1)}}$

$$E(Y) = \sum_{k=2}^{n} k\, \frac{2(k-1)}{n(n-1)} = \frac{2}{n(n-1)}\left(\sum_{k=2}^{n} k^2 - \sum_{k=2}^{n} k\right)$$

$$= \frac{2}{n(n-1)}\left(\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1\right) - \left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right)\right) = \dots = \boxed{\frac{2}{3}(n+1)}$$

2/

4) On a $Y(\Omega) = [\![2;n]\!]$ et également $(n+1-X)(\Omega) = [\![2;n]\!]$

or $\forall k \in [\![2;n]\!]$ $P(Y=k) = \dfrac{2(k-1)}{n(n-1)}$

et $P(n+1-X=k) = P(X = n+1-k) = \dfrac{2(n-(n+1-k))}{n(n-1)} = \dfrac{2(k-1)}{n(n-1)}$

(on remplace k par $n+1-k$ dans $P(X=k)$)

et donc $\forall k \in [\![2;n]\!]$ $P(Y=k) = P(n+1-X=k)$ donc

Y et $n+1-X$ ont même loi, donc même espérance et

$E(Y) = E(n+1-X) = n+1-E(X)$ d'où $E(X) = n+1-E(Y)$

$= n+1 - \frac{2}{3}(n+1) = \boxed{\frac{1}{3}(n+1)}$

Ex 3) Soit D_i : "le lancer du dé donne le numéro i" $(i \in [\![1;6]\!])$

Soit N : "On tire au final une boule noire dans U"

On cherche $P_N(D_4) = \dfrac{P(D_4 \cap N)}{P(N)} = \dfrac{P(D_4)\,P_{D_4}(N)}{\sum_{i=1}^{6} P(D_i)\,P_{D_i}(N)}$ (Bayes)

or $P(D_i) = \dfrac{1}{6}$ $\quad P_{D_i}(N) = \dfrac{16-i}{26}$ (car $10+i$ B et $10+(6-i)$ N)

d'où $P(N) = \dfrac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}\dfrac{16-i}{26} = \dfrac{1}{156}\left(\sum_{i=1}^{6}16 - \sum_{i=1}^{6} i\right) = \dfrac{1}{156}\left(16\times 6 - \dfrac{6\times 7}{2}\right)$

$= \boxed{\dfrac{75}{156}}$

et $P_N(D_4) = \dfrac{\frac{1}{6}\times\frac{16-4}{26}}{\frac{75}{156}} = \dfrac{12}{75} = \boxed{\dfrac{4}{25}}$ $(= 0{,}16)$

Ex 4)

1) On sait que le nombre de 5-listes d'éléments de $[\![1,10]\!]$ est $\boxed{10^5}$

2) Il y a : 1^5 (resp 2^5, resp 3^5, resp 4^5) résultats pour lesquelles les 5 boules tirées sont jaunes (resp bleues, resp rouges, resp vertes)

Soit donc $1^5+2^5+3^5+4^5=\boxed{1300}$ résultats où les 5 boules sont de la même couleur.

3) "4 couleurs apparaissent sur les 5 boules" c'est "il y a exactement 2 boules d'une couleur et une boule de chaque autre couleur".

Dénombrons chaque cas :

. 2 Jaunes exactement :
$$\underbrace{\binom{5}{2}}_{\text{places des jaunes}}\times\underbrace{1^2}_{\text{choix des jaunes}}\times\underbrace{4\times3\times2}_{\text{choix des boules des 3 autres couleurs}}\times\underbrace{3!}_{\text{choix des places des 3 autres couleurs}}$$

soit : $10\times24\times6=\boxed{1440}$

. 2 bleues exactement :
(même principe)
$$\underbrace{\binom{5}{2}}_{\text{places des bleues}}\times\underbrace{2^2}_{\text{choix des bleues}}\times\underbrace{(1\times3\times4)}_{\text{choix des autres boules}}\times\underbrace{3!}_{\text{choix des places}}$$

soit : $10\times4\times12\times6=\boxed{2880}$

. 2 Rouges exactement : (idem)

$$\binom{5}{2} \times 3^2 \times (1 \times 2 \times 4) \times 3! =$$

$$10 \times 9 \times 8 \times 6 = \boxed{4320}$$

. 2 Verts exactement :

$$\binom{5}{2} \times 4^2 \times (1 \times 2 \times 3) \times 3! =$$

$$10 \times 16 \times 6 \times 6 = \boxed{5760}$$

donc au total : $\boxed{\text{14400 résultats possibles}}$

FIN