Lois exponentielles

Jourd'huy

25 décembre 2023

Propriétés de la loi exponentielle

Propriétés

Soient X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, F sa fonction de répartition et a, b deux réels positifs :

- $P(a \leqslant X \leqslant b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$
- $P(X \geqslant a) = e^{-\lambda a}$
- $F(x) = P(X \leqslant x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} \text{ sinon} \end{cases}$
- $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$
- $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$

Exemple de loi exponentielle

Lois exponentielles
Jourd'huy

Exemples

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Lois exponentielles

Jourd'huy

Exemples

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. $P(6 < X \leqslant 10)$

Exemple de loi exponentielle

Exemples

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. $P(6 < X \leqslant 10) = e^{-6\lambda} - e^{-10\lambda}$

Exemple de loi exponentielle

Exemples

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. $P(6 < X \leqslant 10) = e^{-6\lambda} - e^{-10\lambda}$
2. Donner la fonction de répartition de $Y = X^3$

Exemple de loi exponentielle

Exemples

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. $P(6 < X \leqslant 10) = e^{-6\lambda} - e^{-10\lambda}$
2. Donner la fonction de répartition de $Y = X^3$
   Soit $x \in \mathbb{R}$
   - $F_Y(x) = P(Y \leqslant x) = P(X^3 \leqslant x)$

Exemple de loi exponentielle

Exemples

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. $P(6 < X \leqslant 10) = e^{-6\lambda} - e^{-10\lambda}$
2. Donner la fonction de répartition de $Y = X^3$
   Soit $x \in \mathbb{R}$
   - $F_Y(x) = P(Y \leqslant x) = P(X^3 \leqslant x) = P(X \leqslant \sqrt[3]{x})$
     $F_Y(x) = F_X(\sqrt[3]{x})$

Exemple de loi exponentielle

Exemples

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. $P(6 < X \leqslant 10) = e^{-6\lambda} - e^{-10\lambda}$
2. Donner la fonction de répartition de $Y = X^3$
   Soit $x \in \mathbb{R}$
   - $F_Y(x) = P(Y \leqslant x) = P(X^3 \leqslant x) = P(X \leqslant \sqrt[3]{x})$
     $F_Y(x) = F_X(\sqrt[3]{x})$
   - Si $x < 0$ alors $F_Y(x) = 0$

Exemple de loi exponentielle

Exemples

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. $P(6 < X \leqslant 10) = e^{-6\lambda} - e^{-10\lambda}$
2. Donner la fonction de répartition de $Y = X^3$
   Soit $x \in \mathbb{R}$
   - $F_Y(x) = P(Y \leqslant x) = P(X^3 \leqslant x) = P(X \leqslant \sqrt[3]{x})$
     $F_Y(x) = F_X(\sqrt[3]{x})$
   - Si $x < 0$ alors $F_Y(x) = 0$
   - Si $x \geqslant 0$ alors $F_Y(x) = 1 - e^{-\lambda x^{\frac{1}{3}}}$

Exemple de loi exponentielle

Exemples

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. $P(6 < X \leqslant 10) = e^{-6\lambda} - e^{-10\lambda}$
2. Donner la fonction de répartition de $Y = X^3$
   Soit $x \in \mathbb{R}$
   - $F_Y(x) = P(Y \leqslant x) = P(X^3 \leqslant x) = P(X \leqslant \sqrt[3]{x})$
     $F_Y(x) = F_X(\sqrt[3]{x})$
   - Si $x < 0$ alors $F_Y(x) = 0$
   - Si $x \geqslant 0$ alors $F_Y(x) = 1 - e^{-\lambda x^{\frac{1}{3}}}$
3. En déduire la densité de Y.

Exemple de loi exponentielle

Exemples

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. $P(6 < X \leqslant 10) = e^{-6\lambda} - e^{-10\lambda}$
2. Donner la fonction de répartition de $Y = X^3$
   Soit $x \in \mathbb{R}$
   - $F_Y(x) = P(Y \leqslant x) = P(X^3 \leqslant x) = P(X \leqslant \sqrt[3]{x})$
     $F_Y(x) = F_X(\sqrt[3]{x})$
   - Si $x < 0$ alors $F_Y(x) = 0$
   - Si $x \geqslant 0$ alors $F_Y(x) = 1 - e^{-\lambda x^{\frac{1}{3}}}$
3. En déduire la densité de Y. Soit $x \in \mathbb{R}$
   - Si $x < 0$ alors $f(x) = F'_Y(x) = 0$

Exemple de loi exponentielle

Exemples

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. $P(6 < X \leqslant 10) = e^{-6\lambda} - e^{-10\lambda}$
2. Donner la fonction de répartition de $Y = X^3$
   Soit $x \in \mathbb{R}$
   - $F_Y(x) = P(Y \leqslant x) = P(X^3 \leqslant x) = P(X \leqslant \sqrt[3]{x})$
     $F_Y(x) = F_X(\sqrt[3]{x})$
   - Si $x < 0$ alors $F_Y(x) = 0$
   - Si $x \geqslant 0$ alors $F_Y(x) = 1 - e^{-\lambda x^{\frac{1}{3}}}$
3. En déduire la densité de Y. Soit $x \in \mathbb{R}$
   - Si $x < 0$ alors $f(x) = F'_Y(x) = 0$
   - Si $x \geqslant 0$ alors $f(x) = F'_Y(x)$

Exemple de loi exponentielle

Exemples

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. $P(6 < X \leqslant 10) = e^{-6\lambda} - e^{-10\lambda}$
2. Donner la fonction de répartition de $Y = X^3$
   Soit $x \in \mathbb{R}$
   - $F_Y(x) = P(Y \leqslant x) = P(X^3 \leqslant x) = P(X \leqslant \sqrt[3]{x})$
     $F_Y(x) = F_X(\sqrt[3]{x})$
   - Si $x < 0$ alors $F_Y(x) = 0$
   - Si $x \geqslant 0$ alors $F_Y(x) = 1 - e^{-\lambda x^{\frac{1}{3}}}$
3. En déduire la densité de Y. Soit $x \in \mathbb{R}$
   - Si $x < 0$ alors $f(x) = F'_Y(x) = 0$
   - Si $x \geqslant 0$ alors $f(x) = F'_Y(x) = \frac{\lambda}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{\lambda}{\sqrt[3]{x^2}}$