Couple de VA discrètes

Jourd'huy

14 juillet 2020

Loi conjointe

Définition

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes avec $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j, j \in J\}$.

- Donner la loi conjointe du couple (X, Y), c'est donner $P(X = x_i \cap Y = y_j), \forall (i, j) \in I \times J$
- Les lois de X et Y sont appelées les lois marginales de (X, Y)

Loi conjointe

Définition

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes avec $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j, j \in J\}$.

- Donner la loi conjointe du couple (X, Y), c'est donner $P(X = x_i \cap Y = y_j), \forall (i, j) \in I \times J$
- Les lois de X et Y sont appelées les lois marginales de (X, Y)

Propriété

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes avec $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j, j \in J\}$.

- $\forall i \in I, P(X = x_i) = \sum_{j \in J} P(X = x_i \cap Y = y_j)$
- $\forall j \in J, P(X = y_j) = \sum_{i \in I} P(X = x_i \cap Y = y_j)$

Loi conjointe

Exemple

$X \setminus Y$	0	1	
-1	0,10	0,15	
0	0,22	0,31	
1	0,12	0,10	

Loi conjointe

Exemple

$X \setminus Y$	0	1	Loi de X
-1	0,10	0,15	
0	0,22	0,31	
1	0,12	0,10	

Loi conjointe

Exemple

$X \setminus Y$	0	1	Loi de X
-1	0,10	0,15	0,25
0	0,22	0,31	
1	0,12	0,10	

Loi conjointe

Exemple

$X \setminus Y$	0	1	Loi de X
-1	0,10	0,15	0,25
0	0,22	0,31	0,53
1	0,12	0,10	

Loi conjointe

Exemple

$X \setminus Y$	0	1	Loi de X
-1	0,10	0,15	0,25
0	0,22	0,31	0,53
1	0,12	0,10	0,32

Loi conjointe

Exemple

$X \setminus Y$	0	1	Loi de X
-1	0,10	0,15	0,25
0	0,22	0,31	0,53
1	0,12	0,10	0,32
			1

Loi conjointe

Exemple

$X \setminus Y$	0	1	Loi de X
-1	0,10	0,15	0,25
0	0,22	0,31	0,53
1	0,12	0,10	0,32
Loi de Y			1

Loi conjointe

Exemple

$X \setminus Y$	0	1	Loi de X
-1	0,10	0,15	0,25
0	0,22	0,31	0,53
1	0,12	0,10	0,32
Loi de Y	0,44		1

Loi conjointe

Exemple

$X \setminus Y$	0	1	Loi de X
-1	0,10	0,15	0,25
0	0,22	0,31	0,53
1	0,12	0,10	0,32
Loi de Y	0,44	0,56	1

Loi conjointe

Exemple

$X \setminus Y$	0	1	Loi de X
-1	0,10	0,15	0,25
0	0,22	0,31	0,53
1	0,12	0,10	0,32
Loi de Y	0,44	0,56	1

- $E(X) = -1 \times 0,25 + 0 \times 0,53 + 1 \times 0,32 = 0,07$
- $E(Y) = 0 \times 0,44 + 1 \times 0,56 = 0,56$

Loi conjointe

Exemple

$X \setminus Y$	0	1	Loi de X
-1	0,10	0,15	0,25
0	0,22	0,31	0,53
1	0,12	0,10	0,32
Loi de Y	0,44	0,56	1

- $E(X) = -1 \times 0,25 + 0 \times 0,53 + 1 \times 0,32 = 0,07$
- $E(Y) = 0 \times 0,44 + 1 \times 0,56 = 0,56$
- $E(XY) = 0 \times (-1) \times 0,10 + 0 \times 0 \times 0,22 + 0 \times 1 \times 0,12 + 1 \times (-1) \times 0,15 + 1 \times 0 \times 0,31 + 1 \times 1 \times 0,10 = -0,05$

Indépendance

Définition

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes avec $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j, j \in J\}$. Les variables X et Y sont dites indépendantes si $\forall(i; j) \in I \times J$,
$P(X = x_i \cap Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$

Indépendance

Définition

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes avec $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j, j \in J\}$. Les variables X et Y sont dites indépendantes si $\forall (i; j) \in I \times J$,
$P(X = x_i \cap Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$

Propriété

Si X et Y sont deux VA discrètes indépendantes alors
$E(XY) = E(X)E(Y)$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES ROUEN NORMANDIE

Indépendance

Définition

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes avec $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j, j \in J\}$. Les variables X et Y sont dites indépendantes si $\forall (i; j) \in I \times J$,
$P(X = x_i \cap Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$

Propriété

Si X et Y sont deux VA discrètes indépendantes alors $E(XY) = E(X)E(Y)$

Exemple

- Dans l'exemple précédent $P(X = -1) \times P(Y = 0) = 0,25 \times 0,44 = 0,11 \neq 0,10 = P(X = -1 \cap Y = 0)$

Indépendance

Définition

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes avec $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j, j \in J\}$. Les variables X et Y sont dites indépendantes si $\forall (i; j) \in I \times J$,
$P(X = x_i \cap Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$

Propriété

Si X et Y sont deux VA discrètes indépendantes alors $E(XY) = E(X)E(Y)$

Exemple

- Dans l'exemple précédent $P(X = -1) \times P(Y = 0) = 0,25 \times 0,44 = 0,11 \neq 0,10 = P(X = -1 \cap Y = 0)$
- De plus $E(X) \times E(Y) = 0,07 \times 0,56 = 0,0396 \neq -0,05 = E(XY)$

Covariance

Définition

Soient X et Y deux variables aléatoires alors la covariance de X et Y est le nombre, s'il existe, $cov(X,Y) = E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right) = E(XY) - E(X)E(Y)$

Couple de VA discrètes

Jourd'huy

Définition

Soient X et Y deux variables aléatoires alors la covariance de X et Y est le nombre, s'il existe, $cov(X, Y) =$
$E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right) = E(XY) - E(X)E(Y)$

Propriété

Si deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes alors $cov(X, Y) = 0$

Covariance

Définition

Soient X et Y deux variables aléatoires alors la covariance de X et Y est le nombre, s'il existe, $cov(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))) = E(XY) - E(X)E(Y)$

Propriété

Si deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes alors $cov(X, Y) = 0$

Exemple

Dans l'exemple précédent $cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

Covariance

Définition

Soient X et Y deux variables aléatoires alors la covariance de X et Y est le nombre, s'il existe, $cov(X,Y) = E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right) = E(XY) - E(X)E(Y)$

Propriété

Si deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes alors $cov(X,Y) = 0$

Exemple

Dans l'exemple précédent $cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = -0,05 - 0,07 \times 0,56 = -0,0896 \neq 0$

Covariance

Définition

Soient X et Y deux variables aléatoires alors la covariance de X et Y est le nombre, s'il existe, $cov(X,Y) = E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right) = E(XY) - E(X)E(Y)$

Propriété

Si deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes alors $cov(X,Y) = 0$

Exemple

Dans l'exemple précédent $cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = -0,05 - 0,07 \times 0,56 = -0,0896 \neq 0$ donc les variables ne sont pas indépendantes