Mesures en physique: chiffres significatifs, erreurs et incertitudes

Note : Ce document donne les principaux résultats utiles en physique en département STPI. Les démonstrations pourront être trouvées lors des cours de mathématiques du département STPI.

Mesurer une grandeur (un courant, une tension, mais aussi une masse, le taux sanguin d'une espèce chimique) est une activité fondamentale du scientifique et de l'ingénieur. Il s'agit de **rechercher la valeur d'une grandeur**, mais aussi de **lui associer une incertitude** afin d'**évaluer la qualité de la mesure**. La science de la mesure et ses applications constitue la **métrologie**.

I Chiffres significatifs

1 Définition

La notion de chiffres significatifs est très importante dans la présentation des résultats.

Les zéros sont :
- non-significatifs s'ils sont à gauche du premier chiffre non-nul
- significatifs sinon

Les autres chiffres sont significatifs.

Exemple : $1,0 \times 10^3$ a deux chiffres significatifs, 5,06 a 3 chiffres significatifs et 0,002 a un seul chiffre significatif.

⚠ Lors des conversions d'unités ou de passage d'unités à leurs multiples ou sous-multiples, il faut veiller à la conservation du nombre de chiffres significatifs.

Tous les chiffres sont significatifs dans les valeurs publiées, les valeurs obtenues par comptage (entiers) et les définitions.

2 Calculs et chiffres significatifs

Multiplication et division : Le résultat d'une multiplication ou d'une division a autant de chiffres significatifs qu'en a la mesure la moins précise utilisée dans le calcul.

Exemple : calcul de l'aire d'un rectangle de côté 15,5 cm et 17,04 cm.
$\mathcal{A} = 15,5 \times 17,04 = 264,12$ à la calculatrice. On garde **264** (3 chiffres significatifs en arrondissant). L'aire de ce rectangle vaut 264 cm^2.

Addition et soustraction : Le résultat d'une addition ou d'une soustraction a autant de décimales qu'en a la mesure la moins précise utilisée dans le calcul.

Exemple : calcul du périmètre d'un rectangle de côté 5,5 cm et 17,04 cm.
$\mathcal{P} = 5,5 \times 2 + 17,04 \times 2 = 45,08$ à la calculatrice. On garde **45,1**. Le périmètre de ce rectangle vaut 45,1 cm.

Calcul : Pour éviter les erreurs dues à la propagation des arrondis, tous les chiffres significatifs sont conservés lors d'un calcul. Ce n'est que dans l'écriture finale d'un résultat que l'on garde un nombre correct de chiffres significatifs.

Exemple : calcul du volume d'une pyramide à base rectangulaire. Le rectangle de base est de côté 15,5 cm et 17,04 cm. La hauteur de la pyramide est de 24,6 cm.
La formule donnant le volume d'une pyramide est la suivante $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$ où $\mathcal{B}$ est l'aire de la base et h la hauteur de la pyramide. Si l'on utilise la valeur de 264 cm^2 pour l'aire de la base de la pyramide des erreurs d'arrondis se propagent - on trouve un volume de 2,16 $\times 10^3$ cm^3, il faut donc réaliser le calcul avec tous les chiffres significatifs : $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times 264,12 \times 24,6 = 2165,784$.
On garde 3 chiffres significatifs ce qui donne le résultat suivant : $\mathcal{V} = 2,17 \times 10^3$ cm^3.

II Erreur de mesure

1 Définition de l'erreur

L'erreur (ou erreur de mesure) correspond à **la différence entre la valeur mesurée et la valeur vraie**. La valeur vraie est en général inconnue (puisqu'on cherche à la mesurer !).

2 Erreur de mesure aléatoire

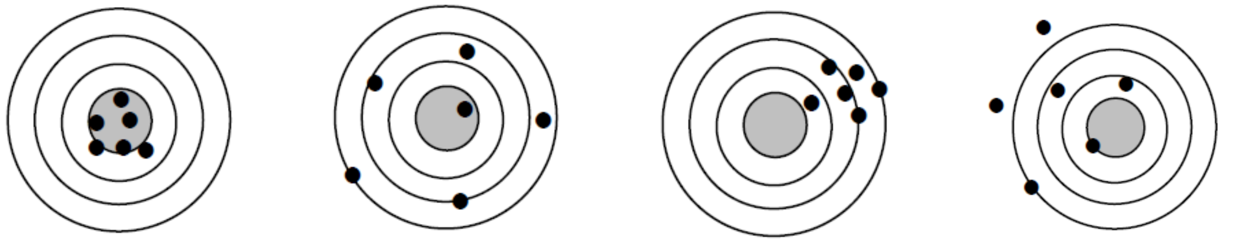
Lorsqu'un même opérateur répète plusieurs fois la mesure d'une même grandeur, les valeurs mesurées peuvent être différentes. Ce phénomène peut être détecté par une étude statistique, on parle d'**erreur de mesure aléatoire**. Cette dispersion des mesures est due à la qualité de la mesure réalisée par l'opérateur et à la qualité de l'instrument de mesure.

Exemple : Lorsque l'on mesure la période d'oscillation d'un pendule en opérant avec un chronomètre, on constate que l'on trouve des résultats légèrement différents lorsque l'on répète les mesures. Ces différences sont essentiellement dues au retard au déclenchement du chronomètre.
$\rightsquigarrow$ Il n'est pas possible de compenser l'erreur aléatoire de mesure, mais elle peut être réduite en augmentant le nombre d'observations.

3 Erreur de mesure systématique

Un appareil défectueux (un chronomètre indiquant toujours des temps trop faibles), mal étalonné ou utilisé incorrectement (oubli d'un paramètre, température, résistance interne des appareils) peut conduire à des valeurs éloignées de la valeur vraie. On parle d'**erreur de mesure systématique**.
$\rightsquigarrow$ Les erreurs systématiques sont difficiles à détecter a priori, mais une fois détectées, on peut souvent les corriger (en prenant en compte le paramètre oublié par exemple).

On peut illustrer les notions d'erreurs aléatoires et erreurs systématiques par le tir sur une cible :



(a) tous les impacts proches du centre : faible erreur aléatoire, faible erreur systématique

(b) impacts très étalés, mais centrés en moyenne sur la cible : forte erreur aléatoire, faible erreur systématique

(c) impacts groupés mais loins du centre : faible erreur aléatoire, forte erreur systématique

(d) impacts étalés et loins du centre de la cible : forte erreur aléatoire, forte erreur systématique

Malheureusement, lors d'une mesure physique, on ne connait pas le centre de la cible, c'est à dire la valeur vraie !

Une fois que toutes les sources d'erreurs systématiques connues ont été prises en compte ou éliminées, il reste une variabilité intrinsèque à tout processus de mesure et on ne peut pas connaitre la valeur vraie de la grandeur x. On prendra donc comme meilleure estimation de cette grandeur la valeur moyenne des mesures, notée $\bar{x}$. Et on évalue la confiance que l'on a sur cette estimation en utilisant la notion d'incertitude.

III Incertitude

L'incertitude $U(x)$ [a] traduit **les tentatives d'estimation de l'erreur de mesure** sur la grandeur x. Seule l'erreur aléatoire est estimée par l'incertitude. Elle permet de caractériser la dispersion des valeurs attribuées à cette grandeur lors du processus de mesure.

a. de l'anglais *uncertainty*

L'incertitude permet de définir un intervalle dans lequel $\bar{x}$ a de grandes chances de se trouver, ces « chances » sont quantifiées par le **niveau de confiance** (voir plus loin). Cet intervalle est centré sur la valeur moyenne des mesures notée $\bar{x}$. L'**intervalle de confiance** se note donc : $[\bar{x} - U(x); \bar{x} + U(x)]$.

La largeur de cet intervalle est choisie pour avoir 99 %, 95 % ou 68 % de chance de trouver la valeur moyenne des mesures à l'intérieur. En physique, en STPI, on fera le choix d'une distribution normale et la valeur de 95 % sera retenue, car cette convention est la plus répandue.

La qualité de la mesure est d'autant meilleure que l'incertitude associée est petite.

Rq : la notation $U(x)$ sera utilisée en mécanique, en optique mais aussi en chimie. En électricité, afin d'éviter toute confusion avec la tension notée U, on utilisera la notation Δx.

1 Présentation d'un résultat expérimental

Un résultat expérimental de mesure de la grandeur x se présente sous la forme :

$$\boxed{\text{valeur mesurée de } x = \bar{x} \pm U(x) \text{ unité de } x\text{, niveau de confiance associé}}$$

Attention, l'incertitude étant toujours évaluée grossièrement, on ne garde qu'**un chiffre significatif** pour celle-ci, et **les arrondis se font par excès**. Le dernier chiffre significatif de la valeur mesurée doit être cohérent avec l'incertitude - si l'on écrit 15,3854 ± 0,5, les chiffres décimaux 854 n'ont aucun sens !
Il faut donc écrire 15,4 ± 0,5, l'arrondi de la mesure se faisant au plus proche (alors que l'arrondi de l'incertitude se fait à l'excès).
L'incertitude relative est définie par $\dfrac{U(x)}{|x|}$, qui s'exprime en pourcentage.

Exemple : La mesure avec un chronomètre de six périodes d'un pendule simple donne 6,65 s avec une incertitude de 0,4 s, niveau de confiance 95 %, ce qui donne pour la période 6,65/6=1,108 et pour l'incertitude : 0,4/6 = 0,067. En ne gardant qu'un seul chiffre significatif pour l'incertitude, on obtient : $U(T) = 0,07$ s
On écrira donc : valeur mesurée de $T = 1,11 +/- 0,07$ s, niveau de confiance 95 % ou $T = 1,11$ s $\pm 7\%$

2 Incertitude de type A (évaluée par une approche statistique)

Lorsqu'un opérateur effectue un nombre n de fois la même mesure, il peut trouver des résultats différents à chaque fois. De même si plusieurs opérateurs effectuent la même mesure en même temps.
Dans de tels cas, on utilise les **notions de statistiques** pour analyser les résultats (moyenne, écart-type).
Pour une série de n mesures indépendantes donnant des valeurs mesurées x_k, **la meilleure estimation de la grandeur x est la moyenne des valeurs mesurées** :

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

L'incertitude-type associée est mesurée avec **l'écart-type** s_x de la distribution dont la meilleur estimation est donnée par la relation suivante (estimateur écart-type)

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

Les logiciels de traitement de données (Microsoft Excel, Libre Office Calc, Synchronie) fournissent moyenne et estimateur de l'écart-type d'une série de mesures. Sur Microsoft Excel (respectivement Libre Office Calc), la fonction à utiliser pour déterminer l'estimateur de l'écart-type est ECARTYPE.STANDARD (respectivement ECARTYPE).

L'**incertitude *U(x)*** asociée à la mesure - avec un **niveau de confiance 95 %** - est donnée par la relation ci-dessous :

$$\boxed{U(x) = 2\frac{s_x}{\sqrt{n}}}$$

On obtient finalement :

$$\boxed{\text{valeur mesurée de } x = \bar{x} \pm 2\frac{s_x}{\sqrt{n}} \text{ , niveau de confiance 95 \%}}$$

Cela signifie que la probabilité de trouver le valeur moyenne des mesures dans l'intervalle de confiance $[\bar{x} - U(x); \bar{x} + U(x)]$ est de 95%.

L'incertitude est inversement proportionnelle à la racine carrée du nombre de mesures n. Dans la pratique, $\sqrt{n}$ croît lentement et améliorer la précision d'un facteur 10 oblige à effectuer 100 fois plus de mesures.

Exemple :
Plusieurs étudiants mesurent la capacité thermique massique du cuivre par une méthode calorimétrique. Ils obtiennent les résultats suivants :

i (numéro de l'étudiant)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
valeur de c trouvée (J.K^{-1}.kg^{-1})	379	359	395	337	371	363	403	401	396	430	375	402

En utilisant un logiciel de traitement de données, on obtient : $\bar{c}$= 384,25 J.K^{-1}.kg^{-1} et s_c=25,05 J.K^{-1}.kg^{-1}, l'incertitude sur la moyenne des 12 mesures vaut donc :

$$U(c) = 2\frac{s_c}{\sqrt{12}} = 2 \times \frac{25,05}{\sqrt{12}} = 14,46 \text{ J.K}^{-1}\text{.kg}^{-1}$$

On peut donc écrire :
meilleure estimation de c = 3,8 $\pm 0,2 \times 10^2$ J.K^{-1}.kg^{-1} niveau de confiance 95 % ou
$3,6 \times 10^2 \leq c \leq 4,0 \times 10^2$ J.K^{-1}.kg^{-1}.
L'écriture 380 $\pm$ 20 J.K^{-1}.kg^{-1} est acceptée mais l'écriture scientifique est à privilégier.
On peut comparer à la valeur tabulée c_{cuivre} = 388 J.K^{-1}.kg^{-1} et conclure qu'il y a une bonne concordance.

3 Incertitude de type B (évaluée pour une mesure unique)

Dans le cas où l'on ne peut pas mesurer une grandeur à partir d'observations répétées, l'incertitude est obtenue par un jugement fondé sur les lois de probabilités supposées de la grandeur mesurée.

La détermination de la loi de l'erreur est liée à la maîtrise du processus de mesure et à l'expérience de l'opérateur ; elle dépend d'un nombre important d'informations : facteurs d'influence - pression, température, spécifications du fabricant ... Les lois rencontrées le plus souvent sont les lois normales ou uniformes (voir cours de probabilités).

• **Pour un appareil numérique (voltmètre, thermocouple), l'incertitude est donnée par la précision constructeur.** On supposera les lois normales.

Exemple : Incertitude sur la mesure d'une tension continue U= 4,98 V, mesure réalisée sur un voltmètre numérique APPA 97.
Sur la notice, on peut lire : *Tension DC Tout calibre précision :* $\pm 0,5\% + 2\text{d}$
ce qui signifie que l'incertitude correspond à 0,5 % de la valeur lue + 2 fois le dernier digit (unité du dernier chiffre de l'affichage), niveau de confiance 95 %.
Cela donne donc $\Delta U = 0,005 \times 4,98 + 2 \times 0,01 = 0,0449$ V. Ici, on garde donc $\Delta U = 0,05$ V (voir section **??**).

• **Pour un appareil analogique - mesure avec une règle graduée, burette graduée etc..., l'incertitude est donnée par une demi-division**.

Exemple : La température mesurée par le thermomètre ci-contre est de 18,0 ± 0,5 °C, niveau de confiance 95 %.

IV Propagation des incertitudes

On considère une grandeur q fonction de plusieurs grandeurs accessibles à la mesure. Pour simplifier, on considère deux grandeurs mesurables x et y, ce qui donne $q = f(x, y)$.
On s'intéresse au problème de l'évaluation de l'incertitude $U(q)$ sur la grandeur q déterminée à partir des incertitudes $U(x)$ et $U(y)$ sur les grandeurs x et y.

1 Cas d'une somme ou d'une différence : $q = x + y$ ou $q = x - y$

On a

$$U(q) = \sqrt{U(x)^2 + U(y)^2}$$

2 Cas d'un produit : $q = xy$

$$U(q) = \sqrt{y^2 U(x)^2 + x^2 U(y)^2}$$

ce qui peut aussi s'écrire en incertitude relative : $\dfrac{U(q)}{q} = \sqrt{\dfrac{U(x)^2}{x^2} + \dfrac{U(y)^2}{y^2}}$

3 Cas d'un rapport : $q = \dfrac{x}{y}$

$$U(q) = \sqrt{\frac{1}{y^2} U(x)^2 + \frac{x^2}{y^4} U(y)^2}$$

ce qui peut aussi s'écrire en incertitude relative : $\dfrac{U(q)}{q} = \sqrt{\dfrac{U(x)^2}{x^2} + \dfrac{U(y)^2}{y^2}}$

4 Cas général : $q = f(x, y)$

Les formules précédentes s'étendent au cas général où la grandeur q est une fonction quelconque des variables x et y : $q = f(x, y)$. On peut montrer que **les incertitudes s'ajoutent en quadrature.**
On a

$$U(q) = \sqrt{\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2 U(x)^2 + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2 U(y)^2}$$

$U(q)$ correspond au même niveau de probabilité que $U(x)$ et $U(y)$ (95 % par défaut).

Exemple : On détermine une puissance électrique par la formule : $\mathcal{P} = UI$.
On mesure $U = 4,98$ V et on en déduit une incertitude $\Delta U = 0,0449$ V. De même pour le courant $I = 24$mA et l'incertitude $\Delta I = 2,97$ mA (ampèremètre analogique peu précis). On obtient $\mathcal{P} = 0,119$ W.
La propagation des incertitudes donne :
$$\frac{\Delta\mathcal{P}}{\mathcal{P}} = \sqrt{\frac{\Delta U^2}{U^2} + \frac{\Delta I^2}{I^2}} = \sqrt{\left(\frac{0,0449}{4,98}\right)^2 + \left(\frac{2,97}{24}\right)^2} \approx \sqrt{0,009016^2 + 0,12375^2} \approx 0,124$$
et donc $\Delta\mathcal{P} =$ 0,01482 W.

On remarque que l'incertitude sur la tension est négligeable.

La conclusion s'écrit avec un nombre de chiffres significatifs correct :
$U = 4,98 \pm 0,05$ V, $I = 24 \pm 3$ mA et $\mathcal{P} = 0,12 \pm 0,02$ W

$\rightsquigarrow$ De manière générale, **il est important de comparer les incertitudes des différentes grandeurs mesurées**. Certaines seront suffisamment petites pour être négligées dans le calcul si on les compare aux autres sources d'incertitudes.

Remarque : Une autre méthode d'estimation des incertitudes consiste à considérer l'incertitude comme un majorant de l'erreur mais cette méthode a le défaut de donner un intervalle très large.

Exemple sur le cas simple $q = x + y$.
On connait $U(x)^{maj}$ et $U(y)^{maj}$ les majorants de l'erreur sur x et y. On cherche le majorant de l'erreur sur q.
Valeur maximum accessible à q :
$q_{max} = x_{max} + y_{max} = \bar{x} + U(x)^{maj} + \bar{y} + U(y)^{maj} = (\bar{x} + \bar{y}) + (U(x)^{maj} + U(y)^{maj})$

De la même façon, on obtient très facilement que la plus petite valeur accessible à q s'écrit :
$q_{min} = (\bar{x} + \bar{y}) - (U(x)^{maj} + U(y)^{maj})$ ce qui donne $\boxed{U(x + y)^{maj} = U(x)^{maj} + U(y)^{maj}}$

Cependant, la probabilité que l'erreur sur x soit proche de son majorant et que l'erreur sur y soit proche de son majorant est très faible. Cette formule suppose que simulatément x est proche de son majorant et y est proche de son majorant, ce qui est extrêmement improbable.
On privilégiera donc la formule de la section **??**.