

# Computational approach of systems design in engineering

## Calcul Scientifique pour la Conception de Systèmes, Partie 2 (CSCS2)

D. Lemosse<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Département de Mécanique, INSA Rouen Normandie

<sup>2</sup>Laboratoire de Mécanique de Normandie, EA 3828

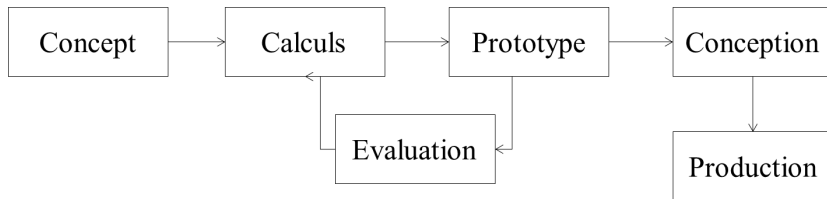
*Mai 2020*

- 1 Généralités
- 2 Ansys
- 3 Modèles éléments finis en mécanique des solides
- 4 Dimensionnement mécanique
- 5 Modèles de résistance des matériaux
- 6 Génération de maillages
- 7 Problèmes non linéaires
- 8 Modèles de résistance des matériaux
- 9 Analyse modale
- 10 Flambement
- 11 Résolution par méthodes de puissance

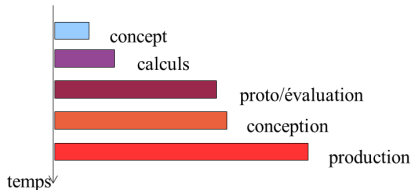
- 1 Généralités
- 2 Ansys
- 3 Modèles éléments finis en mécanique des solides
- 4 Dimensionnement mécanique
- 5 Modèles de résistance des matériaux
- 6 Génération de maillages
- 7 Problèmes non linéaires
- 8 Modèles de résistance des matériaux
- 9 Analyse modale
- 10 Flambement
- 11 Résolution par méthodes de puissance

# Place de la simulation dans la chaîne de conception mécanique

## Processus « classique » de conception d'un produit



## Coût induit par une modification selon les phases



## Objectifs de la simulation en conception mécanique

### Évaluation des efforts dans une structure

Les systèmes technologiques sont souvent hyperstatiques avec des configurations géométriques et mécaniques complexes.

Les méthodes analytiques ne permettent pas l'évaluation des efforts internes.

### Vérifier la tenue d'un prototype

Vérifier que la modélisation de la conception de la structure réelle vérifie le cahiers de charges mécanique, à savoir des contraintes inférieures aux limites dimensionnante : élastique ou rupture.

### Optimiser un système (géométrie, matériau)

On cherche à améliorer une conception existante et fonctionnelle généralement pour en réduire le coût, soit par la diminution de la matière utilisée, soit par l'amélioration des performances.

# Défauts/qualités des méthodes numériques

## Les qualités

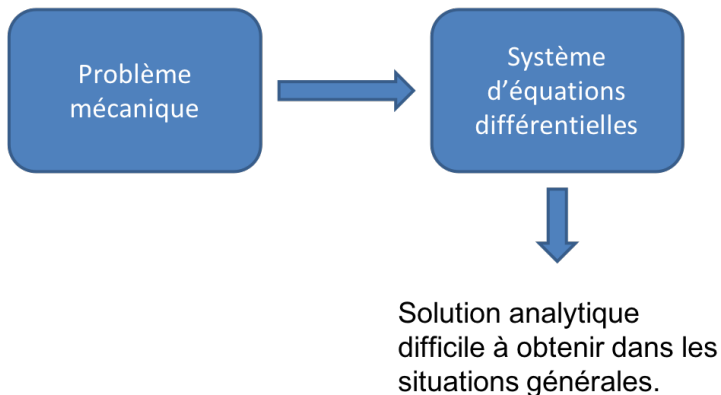
- peu coûteuses (investissement matériel),
- tout est maîtrisé (étude de sensibilité, paramétrique),
- répétabilité et quasi-infinité des tests,
- accès à des informations physiquement inaccessibles.

## Les défauts

- phase de modélisation très importante (geom, cpt ...),
- multiple approximations (maillage, interpolation ...),
- le contrôle des paramètres peut influencer le résultat,
- expérience très importante (choix du maillage ...).

## Equations d'équilibre des milieux continus déformables

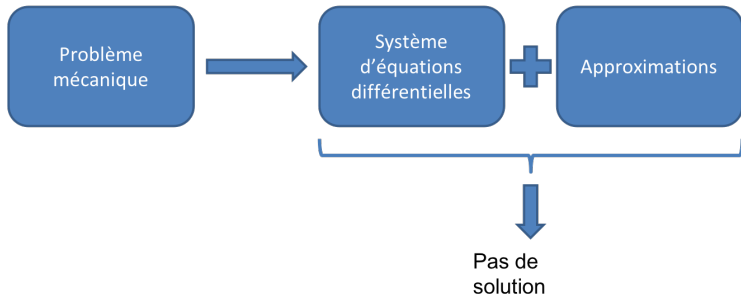
La résolution d'un problème de mécanique des milieux déformables est souvent difficile.



## Equations d'équilibre des milieux continus déformables

On peut quelques fois obtenir une solution à partir d'hypothèses permettant l'introduction d'approximations a priori de la solution.

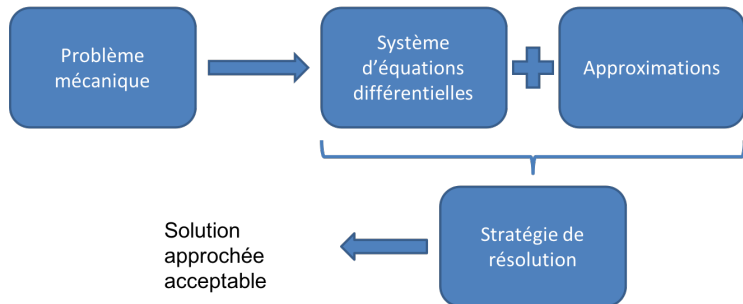
Mais dans le cas général, cette stratégie ne permet pas d'obtenir une solution vérifiant l'ensemble des équations du système.





## Equations d'équilibre des milieux continus déformables

Afin d'obtenir une solution malgré tout, on met en place des stratégies de résolution permettant d'obtenir une solution approchée acceptable (par exemple au sens des moindres carrés).



## Mécanique des milieux continus

L'équation d'état est écrit en temps et en espace.

$$\operatorname{div}(\sigma) + \vec{f}_v = \rho \vec{\gamma}$$

à laquelle on ajoute les conditions aux limites (CL) et les conditions initiales (CI).

On approxime les équations différentielles d'abords en espace pour réduire l'EDP en EDO, puis en temps.

$$f(U(x, t), t) = 0 \longrightarrow g(U_i, t) = 0 \longrightarrow h(U_i, t_j) = 0$$

$(U(x, t))$  fonction continue en temps et en espace,  $i \in [1, N_i]$  discrétisation en espace,  $j \in [1, N_j]$  discrétisation en temps.

# Approximation des équations

On utilise plusieurs stratégies de résolutions numériques des équations différentielles

## Résolution des EDO

Variable unique (ou dissociées)

Schéma dédié : différences finies

## Résolution des EDP

Plusieurs variables (associées)

Schémas dédiés :

- Eléments finis en structure
- Volumes finis en fluide
- Eléments de frontière en acoustique

# Principe de la méthode des éléments finis

## Méthode des éléments finis

Méthode de résolution d'équations aux dérivées partielles s'appuyant sur trois outils mathématiques :

- formulation faible (principe des travaux virtuels)
- discrétisation
- interpolation

On parle classiquement de formulation en déplacement (déplacements introduits explicitement en inconnues)

## Formulation de Galerkin

Champs réel et virtuel ayant même approximation

## Formulation isoparamétrique

Géométrie et cinématique ayant la même approximation

## Formulation en déplacements d'une barre

On étudiera le cas statique d'une barre à section constante de matériau homogène en élasticité linéaire.

$$\vec{div}(\sigma) + \vec{f}_v = \vec{0}$$

$$\frac{d\sigma_x(x)}{dx} + f_x(x) = E \cdot \frac{d\epsilon_x(x)}{dx} + f_x(x) = E \cdot \frac{d^2u(x)}{dx^2} + f_x(x) = 0$$

$$\int_V \delta U \cdot \left( E \cdot \frac{d^2u(x)}{dx^2} + f_x(x) \right) dV = 0$$

### Formulation faible de barre

$$\delta W_{int} + \delta W_{ext} = 0$$

$$\delta W_{int} = - \int_V \frac{d\delta u(x)}{dx} \cdot E \cdot \frac{du(x)}{dx} dV$$

$$\delta W_{ext} = \int_V \delta U \cdot f_x(x) dV + \int_{\partial V} \delta U \cdot F_x(x) dS$$

## Interpolation cinématique sur une barre

Un élément de barre linéaire à deux noeuds induit une interpolation linéaire des déplacements à partir des valeurs nodales  $u_1$  et  $u_2$ .

$$u(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) \cdot u_1 + \left(\frac{x}{L}\right) \cdot u_2 = N_1(x) \cdot u_1 + N_2(x) \cdot u_2$$

La formulation de Galerkin induit la même approximation pour le champ virtuel.

$$\delta u(x) = N_1(x) \cdot \delta u_1 + N_2(x) \cdot \delta u_2$$

### Approximation des champs de déformation par éléments

$$\frac{du(x)}{dx} = \frac{dN_1(x)}{dx} \cdot \delta u_1 + \frac{dN_2(x)}{dx} \cdot \delta u_2 = \begin{bmatrix} \frac{dN_1(x)}{dx} & \frac{dN_2(x)}{dx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [B] \{U_e\}$$

$$\frac{d\delta u(x)}{dx} = [B] \{\delta U_e\}$$

## Matrice de raideur d'une barre

Ecrire le travail virtuel des efforts internes sous forme condensée matricielle fait apparaître la matrice élémentaire de raideur  $[K_e]$

$$\delta W_{int} = - \{ \delta U_e \}^T [K_e] \{ U_e \}$$

$$[K_e] = \int_x [B]^T ES [B] dx$$

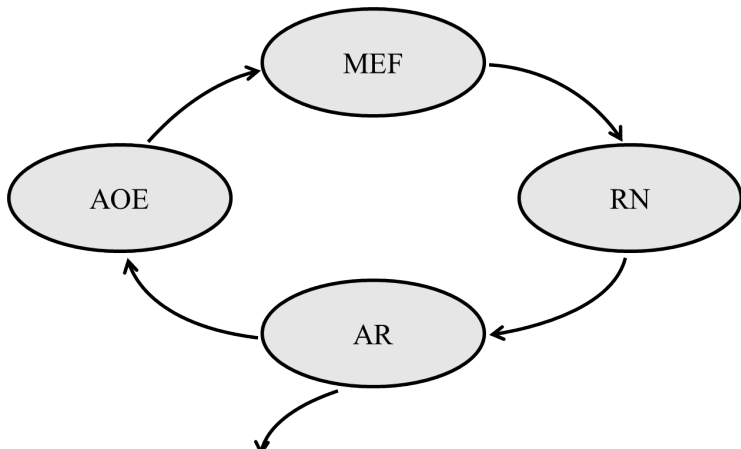
Matrice de raideur de l'élément de barre linéaire à deux noeuds

$$[K_e] = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

## Boucle de modélisation

Modèle de simulation en 4 phases :

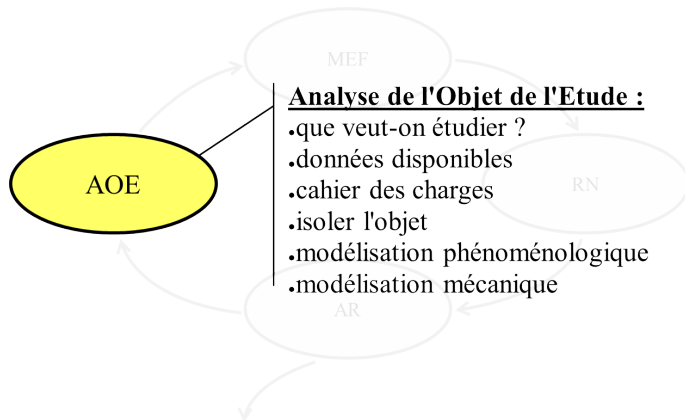
- Choix de modélisation analytique.
- Choix et réalisation du modèle éléments finis.
- Résolution numérique.
- Analyse de la validité et des résultats de la modélisation.





# Boucle de modélisation - Analyse de l'Objet de l'Etude

## Etape 1 : Choix de modélisation analytique

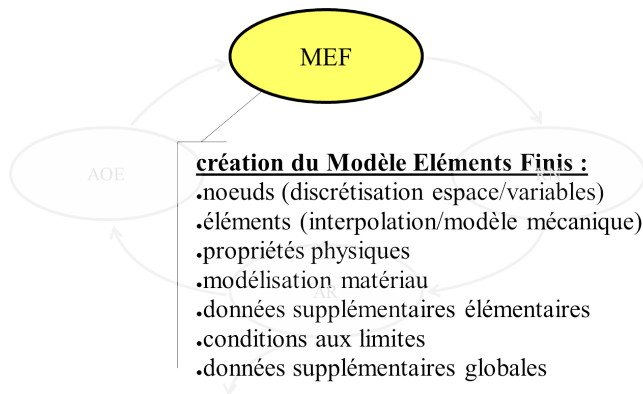


## Boucle de modélisation - Analyse de l'Objet de l'Etude (suite)

- Choix de la pièce (ensemble de pièces) à étudier.
- Définir la géométrie qui modélisera la pièce.
- Remplacer l'extérieur par des modèles mécaniques (torseurs, limites).
- Faire une collection des données quantitatives (matériaux, expériences).
- Introduire les hypothèses mécaniques de modélisation : topologie, linéarités ou non linéarités.
- Représenter la géométrie par un modèle numérique (CAO)
- Introduire les simplifications géométriques (courbures, sym)
- Découpage de la géométrie en zones simples (assemblages, partitions)

# Boucle de modélisation - Modélisation par Eléments Finis

## Etape 2 : Choix et réalisation du modèle éléments finis

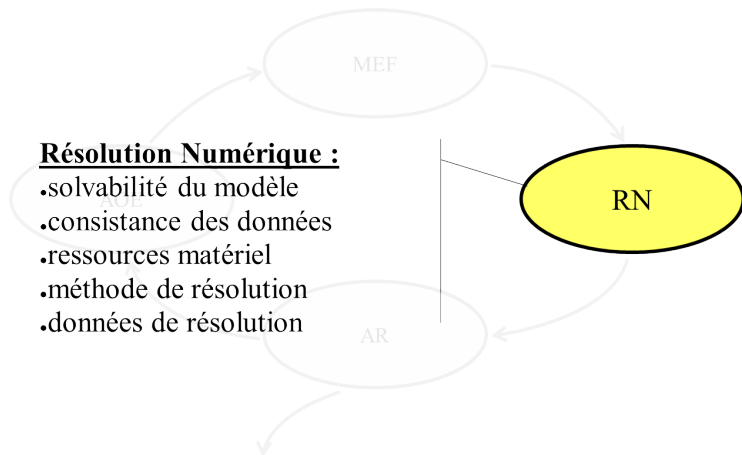


## Boucle de modélisation - Modélisation par Eléments Finis (suite)

- Réaliser un maillage de la géométrie
  - placer des noeuds aux points géométriques importants
  - mailler tout l'espace
  - raffiner dans les zones sensibles (mesures, formes complexes)
  - chercher des éléments de bonne qualité (Q4 ou degré 2)
- Traduire les conditions aux limites sur la discrétisation
  - déplacements imposés aux noeuds (restrictions, contraintes)
  - efforts ponctuels et répartis transformés en efforts généralisés
  - Les simplifications de type symétrie sont introduites en déplacements imposés
  - Il faut éliminer les mouvements de corps rigides
- La modélisation analytique et géométrique conditionnent la topologie du modèle éléments finis :
  - 1D – barre, poutre, coque axisymétrique
  - 2D – plan, axisymétrie, coque
  - 3D – modèle massif
  - A topologie donnée, il existe plusieurs possibilités de modèles en formulation DKT, Q4G, Wilson ...
  - support d'approximation (noeuds, degré)
  - Il existe des modèles sans support phénoménologique physique ressort, rigide, masse et raideur

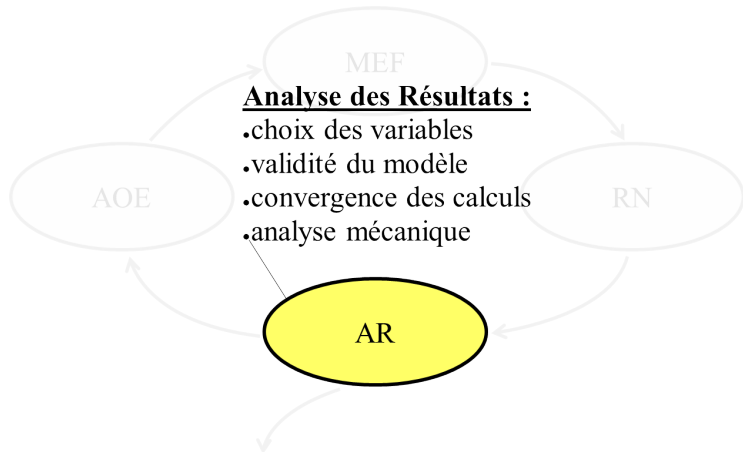
# Boucle de modélisation - Résolution Numérique

## Etape 3 : Résolution numérique



## Boucle de modélisation - Analyse des Résultats

Etape 4 : Analyse de la validité et des résultats de la modélisation



# Boucle de modélisation - Analyse des Résultats

## Motivations du post-traitement

Le post traitement c'est

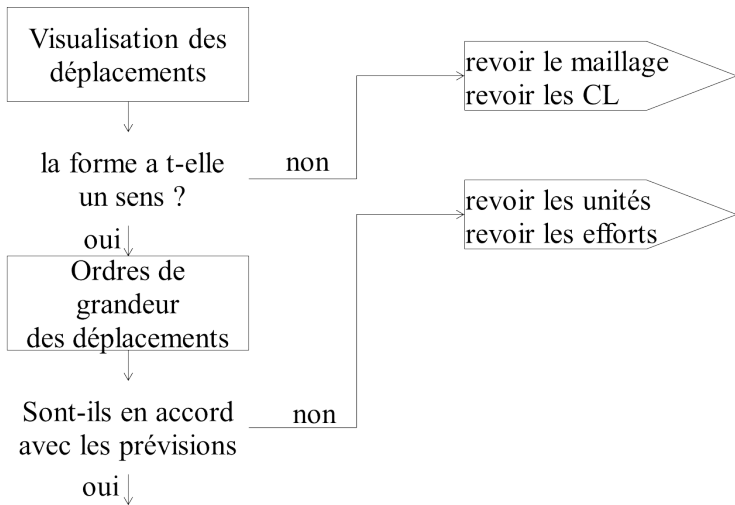
- L'évaluation de la qualité du modèle (convergence et corrélation).
- L'analyse des quantités mécaniques traduisant la qualité de la pièce étudiées (vérification ou dimensionnement).

## Résultats évalués

La MEF évalue les déplacements (degré de liberté aux noeuds) et éventuellement variables internes (dans l'élément).

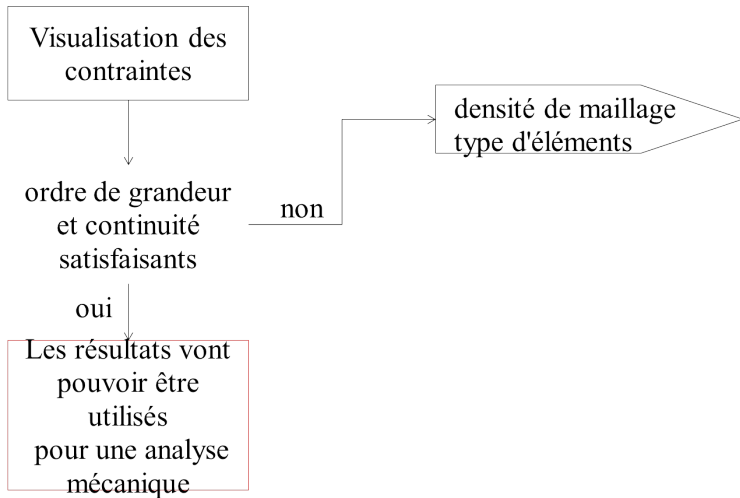
Il faut préciser la sauvegarde des données internes aux éléments (contraintes, déformations, énergies de déformations ...)

# Validité de la modélisation





## Validité de la modélisation (suite)



# Types de dimensionnements

## Cinématique (rigidité)

- assurer une position (antenne)
- assurer un déplacement (débattement d'un capteur)

## Statique (résistance)

- état de contrainte inférieur à un état limite
- non plastification (limite élastique pour les matériaux ductiles) - fonctionnement normal
- non rupture (limite à la rupture) - accident

## Fatigue

- chargement cyclique avec effort modéré (ou non)
- tenue ou nombre de cycles

## Flambement

- structures élancées en état de compression
- phénomène de bifurcation - instabilité

- 1 Généralités
- 2 Ansys**
- 3 Modèles éléments finis en mécanique des solides
- 4 Dimensionnement mécanique
- 5 Modèles de résistance des matériaux
- 6 Génération de maillages
- 7 Problèmes non linéaires
- 8 Modèles de résistance des matériaux
- 9 Analyse modale
- 10 Flambement
- 11 Résolution par méthodes de puissance

# Présentation de ANSYS



Ansys est un éditeur de logiciel spécialisé dans la simulation numérique. ANSYS développe, promeut et assure le support de ses logiciels de simulation servant à prédire le comportement d'un produit dans son environnement.



FIGURE – Par Tmilnthorp sur Wikipédia

L'entreprise a son siège principal à Canonsburg en Pennsylvanie aux USA. Elle possède plusieurs sièges et filiales en Europe, Asie et Amérique du nord.

# Présentation de Ansys

ANSYS commercialise de nombreux logiciels dans une suite ANSYS Softwares.  
Les logiciels phares de cette suite sont :

## ANSYS Structural

- Calcul statique ;
- Calcul dynamique (modale, harmonique, temporel, spectral, vibration aléatoire) ;
- Calcul transitoire ;
- Flambement linéaire et non linéaire ;
- Comportements non linéaires (matériau et géométrique).

## ANSYS Mechanical

- Il possède les capacités d'ANSYS Structural, en y ajoutant ;
- Analyse thermique (conduction, rayonnement, radiation, convection)
- Couplage thermo-mécanique ;
- Calcul acoustique et couplage acoustique-mécanique ;
- Couplage électro-mécanique et électro-thermo-mécanique.

## Présentation de Ansys

ANSYS commercialise de nombreux logiciels dans une suite ANSYS Softwares. Les logiciels phares de cette suite sont :

### ANSYS CFX et Fluent

Ces logiciels permettent de réaliser des simulations de mécanique de fluides.

### ANSYS AutoDyn et LS-DYNA

Ces logiciels permettent de résoudre les problèmes de mécanique avec de grandes déformations et de grandes vitesses de déformations, telles que pour les crashes ou les explosions. Ces logiciels utilisent une formulation explicite.

### ANSYS Electromagnetics et Ansoft

Ces logiciels permettent de réaliser des simulations de phénomènes électromagnétiques.

### ANSYS multiphysique

Ce logiciel intègre tous les solveurs de calcul implicite avec un couplage électromagnétique-thermo-mécanique..

# Historique



FIGURE – Portrait de J.A. Swanson - Pittsburgh university

- En 1963, le Dr. John A. Swanson travaille sur l'analyse des contraintes des réacteurs nucléaires à Westinghouse Astronuclear Labs à Pittsburgh, c'est le début de la vulgarisation de la méthode des éléments finis.

# Historique

- En 1963, le Dr. John A. Swanson travaille sur l'analyse des contraintes des réacteurs nucléaires à Westinghouse Astronuclear Labs à Pittsburgh, c'est le début de la vulgarisation de la méthode des éléments finis.
- En 1970, John A. Swanson quitta Westinghouse Astronuclear Labs et développe le logiciel nommé Swanson Analysis Systems, ce logiciel permettait de simuler le comportement transitoire des composants nucléaires sous chargement thermique et de pression.
- En 1980, ANSYS fonctionne sur un VAX 11-780 mini-ordinateur.
- En 1994, Swanson Analysis System devient ANSYS.
- En 1995, ANSYS fonctionne sous Windows 95.
- En 2005, ANSYS acquiert AutoDyn.
- En 2006, ANSYS achète Fluent.
- En 2010, ANSYS achète ANSOFT et MAXWELL.



## Environnements logiciels

ANSYS possède deux environnements pour exécuter ces solveurs :

### ANSYS Classique ou APDL

C'est la première solution logicielle développée. Elle est destinée à la construction de modèles éléments finis à géométrie simple, facilement réalisable à l'aide d'opérations géométriques basiques. A partir de cet environnement, l'utilisateur construit directement un modèle élément finis en utilisant le langage scripté ANSYS Parametric Design Language (APDL).

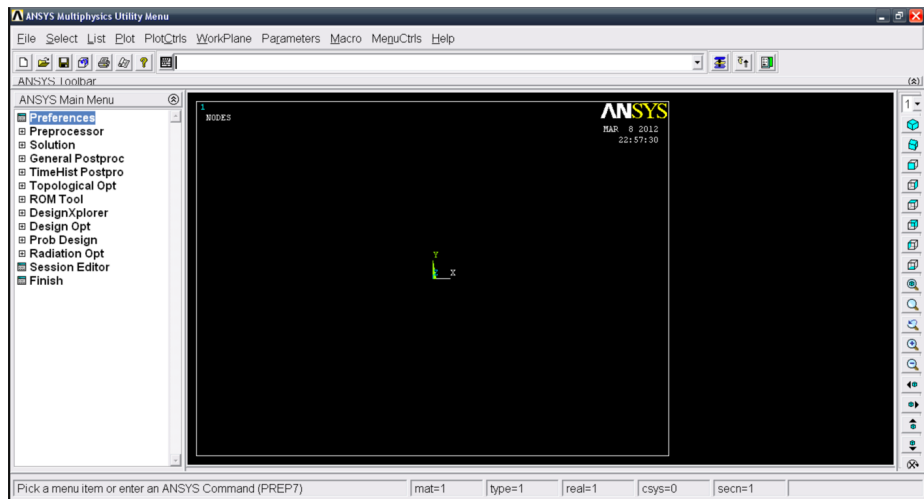
### ANSYS Workbench

C'est une plateforme qui propose une approche différente dans la construction des modèles, en réutilisant le code ANSYS initial. Elle est particulièrement adaptée au traitement de cas à géométrie complexe (nombreux corps de pièces).

# Interface de ANSYS APDL

Pour exécuter le logiciel, il faut sélectionner :

Démarrer > Tous les programmes > ANSYS 2019 R3 > Mechanical APDL 2019 R3



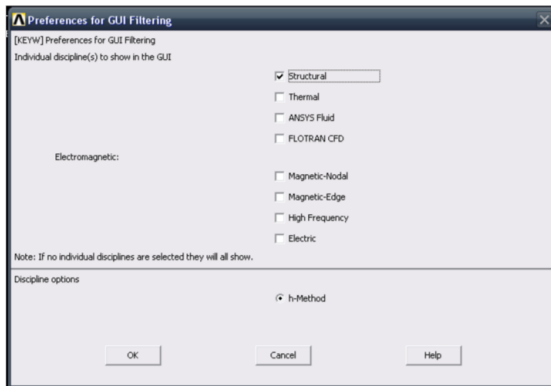
## Les fichiers de ANSYS

ANSYS écrit plusieurs fichiers lui permettant de stocker les données ou les résultats. Le nom de ces fichiers est toujours le même, avec une extension qui change. Par défaut, le nom du fichier est file.xxx. Pour changer le nom du fichier de travail (jobname), il faut le faire dès le début de l'étude : File > Change Jobname > "nomDuFichier"

File type	File name	File format
Log file	Jobname.log	ASCII
Error file	Jobname.err	ASCII
Output file	Jobname.out	ASCII
Database file	Jobname.db	Binary
Results files :		
Structural or coupled	Jobname.rst	Binary
Thermal	Jobname.rth	Binary
Magnetic	Jobname.rmg	Binary
FLOTRAN	Jobname.rfl	Binary
Load step file	Jobname.Sn	ASCII
Graphics file	Jobname.grph	ASCII
Element matrices	Jobname.emat	Binary

## Choix du type d'analyse

Il faut ensuite sélectionner, dans le menu "Preferences", le type d'étude que l'on va effectuer.



## Organisation du menu principal

Le menu de ANSYS est organisé d'une manière chronologique selon la construction du modèle de simulation. Ainsi, pour réaliser une analyse par éléments finis, nous devons :

### Préparation de la modélisation Preprocessor /prep7

- Choix de l'élément fini à utiliser en fonction de l'étude à réaliser.
- Affectation des propriétés physiques (section, épaisseurs ...).
- Création des matériaux.
- Création du modèle géométrique.
- Maillage et création des éléments.

### Résolution Solution /sol

- Application des conditions aux limites et des chargements.
- Résolution

### Post traitement General Postproc /post1 et TimeHist Postpro /post26

- Traitement et affichage des résultats

# Création des modèles mécaniques

Une particularité de Ansys est que le modèle mécanique (milieu et matériau) doit être défini afin de réaliser la discrétisation (le maillage).

## Modèle mécanique

Dans le menu **Preprocessor**

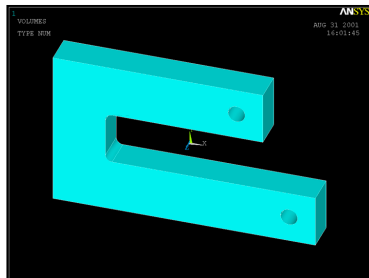
- Le modèle de comportement mécanique est défini par **Element Type** ;
- Les propriétés comme l'aire d'une barre sont définis par **Real Constants** ;
- Les sections et épaisseurs sont définis par **Sections** ;
- Les lois matériaux et leurs valeurs sont définis par **Material Props** ;

# Géométrie

Même s'il est possible de créer un maillage ex-nihilo noeud par noeud, et élément par élément, on a le plus souvent besoin de définir une géométrie support du maillage.

## Modèle géométrique : menu **Modeling**

Ce menu regroupe tous les outils classiques de création d'objets de CAO. Les outils de création des objets élémentaires (points, lignes, surfaces, volumes). Des outils de modifications et de transformations (extrusion, duplication, déplacements ...).

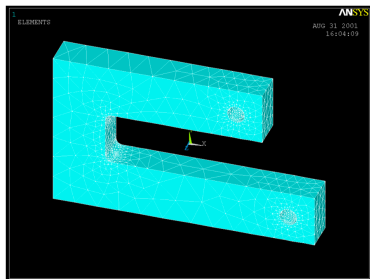


# Maillage

La discrétisation dans ANSYS se fait selon les étapes suivantes :

## Maillage : menu **Meshing**

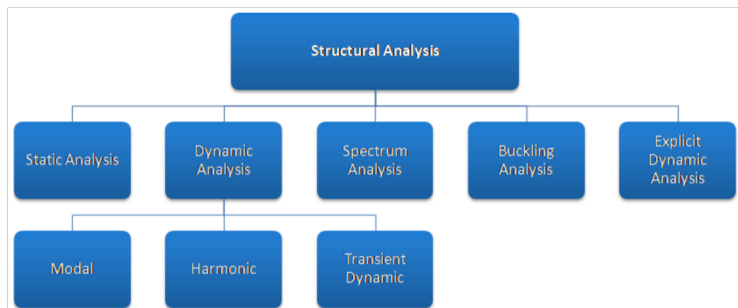
- Sélection de la physique du modèle dans **Mesh Attributes** ;
- Définition de la taille des éléments du maillage dans **Size Cntrls** ;
- Opération de discrétisation dans **Mesh**.





## Cas d'étude

Bien que cela puisse être défini dans le menu **Preprocessor**, on définit de préférence le cas d'étude dans le menu **Solution**.



Cette sélection, réalisée dans le sous menu **Analysis Type**, donne accès aux conditions aux limites et aux options de résolutions dédiées.

# Conditions aux limites

## Define Loads

Dans ce menu, on peut définir les conditions aux limites du problème : déplacements imposés, forces et moments ponctuels, pressions, températures, inerties et gravité, etc.

## Load Step Opts

Dans ce menu, on peut définir plusieurs séries de conditions aux limites. Ces conditions sont appliquées successivement comme un chargement temporel (mais quasi statique dans les cas ne prenant pas en compte la dynamique).

# Résolution

Avant d'exécuter la simulation, on peut préciser les options de résolution

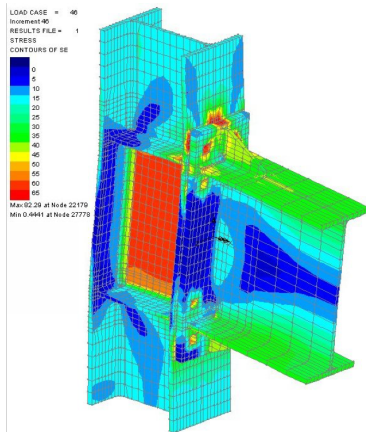
## Solution Controls

Ce menu permet de choisir

- Le type de calcul (Linéaire, non linéaire) ;
- Le mode de pilotage de la résolution et le nombre de pas de calcul ;
- La fréquence de sauvegarde des résultats ;
- Les options de résolution (direct ou itératif).

## Affichage des résultats

Une fois que la résolution est terminée, on peut choisir les jeux de résultats à utiliser pour représenter la déformation de la pièce ou représenter les champs de contraintes et de déformations.



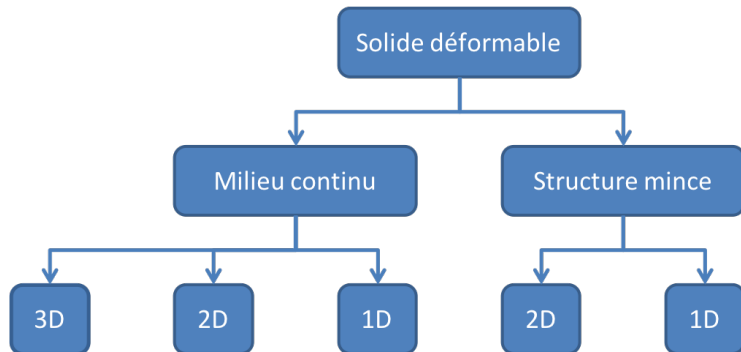
## Un langage scripté

Ce qu'il faut bien comprendre, c'est que les opérations réalisées successivement par l'interface logicielle peuvent être réalisées directement en ligne de commande dans un langage de programmation spécifique au logiciel.

```
!* _____*!  
!* Creation du type element *!  
!* _____*!  
ET,1,SHELL181  
!* _____*!  
!* Creation du materiau *!  
!* _____*!  
MPTEMP,,,,,,,,  
MPTEMP,1,0  
MPDATA,EX,1,,2e11  
MPDATA,PRXY,1,,0.3
```

- 1 Généralités
- 2 Ansys
- 3 Modèles éléments finis en mécanique des solides**
- 4 Dimensionnement mécanique
- 5 Modèles de résistance des matériaux
- 6 Génération de maillages
- 7 Problèmes non linéaires
- 8 Modèles de résistance des matériaux
- 9 Analyse modale
- 10 Flambement
- 11 Résolution par méthodes de puissance

# Modélisation des solides



# Familles de modèles éléments finis

## Mécanique des solides déformables

- Éléments massifs
- Éléments d'élasticité plane (contrainte ou déformation plane)
- Éléments axisymétriques
- Éléments de barre

## Résistance des matériaux

- Éléments plaques et coques
- Éléments de poutre

## Modèles rhéologiques

- Éléments ressort
- Éléments rigides
- Éléments de masses



## Mécanique des solides déformables

Directement obtenus à partir des équations de la mécanique des milieux continus. Eventuellement avec des hypothèses de comportement global (élasticité plane par exemple).

Les degrés de liberté sont les déplacements liés à des points matériels.

Les efforts sont traduits par un tenseur des contraintes complet ou partiel.

### Modèles de mécanique des solides déformables

- 3D - Éléments massifs
- 2D - Éléments d'élasticité plane (contraintes ou déformations plane)
- 2D - Éléments axisymétriques
- 1D - Éléments de barre

# Eléments massifs

## Topologie 3D

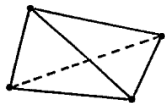
**Cinématique** déplacements ( $U, V, W$ ) aux noeuds.

**Statique** Tenseur des contraintes dans l'élément ( $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ ).

**Propriétés physiques** -

**Matériau** Relation de comportement et données matériaux.

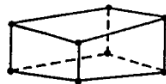
**Supports géométriques** tétraèdre, hexaèdre, prisme.



(4 noeuds)



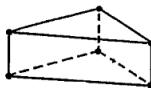
(10 noeuds)



(8 noeuds)



(20 noeuds)

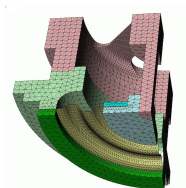
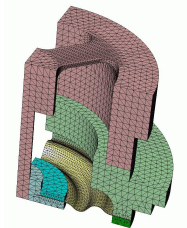
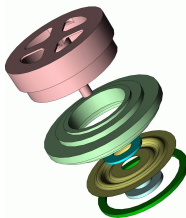
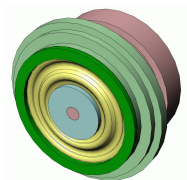


(6 noeuds)



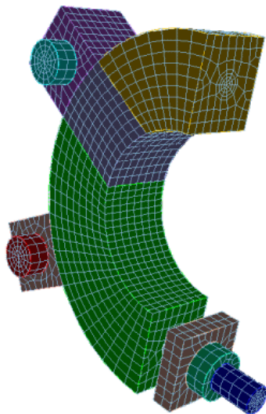
(15 noeuds)

# Éléments massifs - exemple



## Maillages structurés et partition

Il faut toujours préférer les éléments hexaédriques. L'obtention de maillage structuré. Ces maillages sont obtenus par transformation trans-finies ou par extrusions. Sur des géométrie complexe, ce type de maillage nécessite le partitionnement de la géométrie complète en éléments plus simples.



# Eléments plans

**Topologie** 2D

**Cinématique** déplacements  $(U, V)$ .

**Statique** Tenseur des contraintes dans l'élément  $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$ .

**Propriétés physiques** Epaisseurs.

**Matériau** Relation de comportement (hypothèse  $\sigma_p$  ou  $\epsilon_p$ ) et données matériaux.

**Supports géométriques** triangle, quadrangle (dans le plan  $(O, \vec{X}, \vec{Y})$ ).



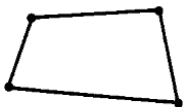
(3 noeuds)



(6 noeuds)



(9 noeuds)



(4 noeuds)

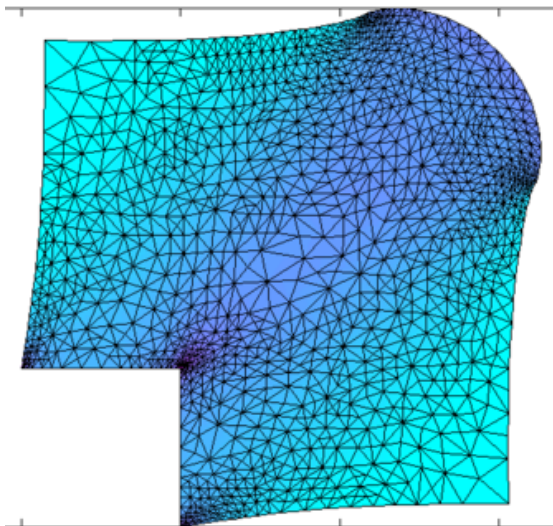


(8 noeuds)



(12 noeuds)

# Éléments plans - exemple



## Éléments axisymétriques

**Topologie** 2D

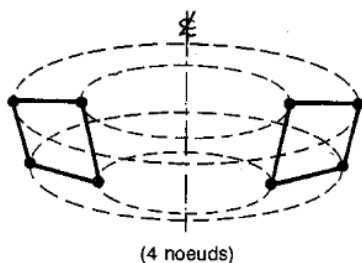
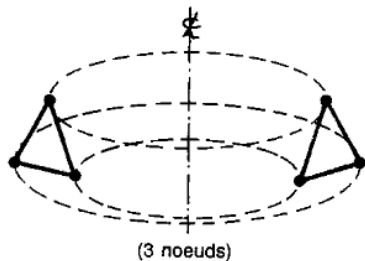
**Cinématique** déplacements ( $U_r, U_z$ ) aux noeuds.

**Statique** Tenseur des contraintes dans l'élément ( $\sigma_r, \sigma_z, \sigma_\theta, \tau_{rz}$ ).

**Propriétés physiques** -

**Matériau** Relation de comportement axisymétrique et données matériaux.

**Supports géométriques** triangle, quadrangle (dans le plan  $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ ).



# Eléments de barre

Topologie 1D

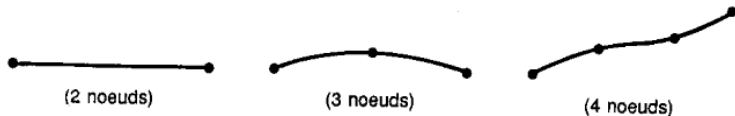
Cinématique déplacements ( $U$ ) aux noeuds.

Statique Tenseur des contraintes dans l'élément ( $\sigma_x$ ).

Propriétés physiques Aire de la section.

Matériau Relation de comportement et données matériaux.

Supports géométriques linéique.





- 1 Généralités
- 2 Ansys
- 3 Modèles éléments finis en mécanique des solides
- 4 Dimensionnement mécanique**
- 5 Modèles de résistance des matériaux
- 6 Génération de maillages
- 7 Problèmes non linéaires
- 8 Modèles de résistance des matériaux
- 9 Analyse modale
- 10 Flambement
- 11 Résolution par méthodes de puissance

# Types de dimensionnements

## Cinématique (rigidité)

- assurer une position (antenne)
- assurer un déplacement (débattement d'un capteur)

## Statique (résistance)

- état de contrainte inférieur à un état limite
- non plastification (limite élastique pour les matériaux ductiles) - fonctionnement normal
- non rupture (limite à la rupture) - accident

## Fatigue

- chargement cyclique avec effort modéré (ou non)
- tenue ou nombre de cycles

## Flambement

- structures élancées en état de compression
- phénomène de bifurcation - instabilité

# Contrainte maximale

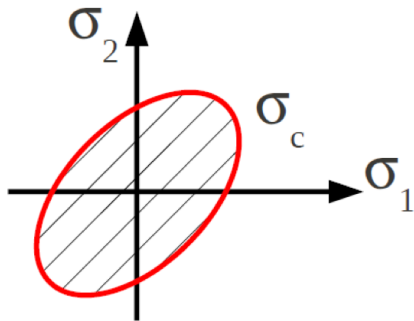
Limite élastique  
Critère de Von Mises

$$\sigma < \sigma_{\text{limite}}$$

$$[\sigma] \rightarrow \sigma_{VM} < \sigma_{\text{limite}}$$

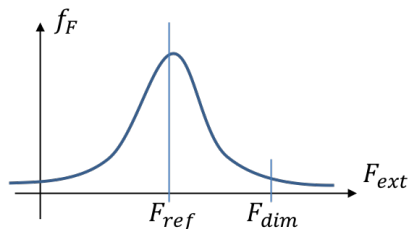
$$\sigma_{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

Matériaux ductiles  
Insensible en hydrostatique.  
Matériaux métalliques



## Facteurs de sécurité

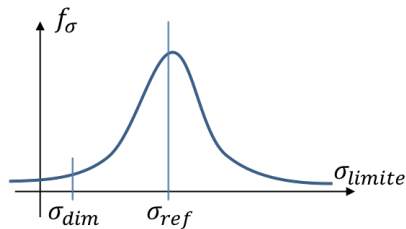
Prendre en compte les variations des efforts, en particulier la valeur maximale.  
Prendre en compte aussi les écarts des caractéristiques matériaux.



$$F_{dim} = \gamma_F \cdot F_{ref} \rightarrow [\sigma]$$

On va donc chercher à vérifier

$$\sigma(F_{dim}) < \sigma_{dim}$$



$$\sigma_{dim} = \frac{\sigma_{ref}}{\gamma_\sigma}$$

Les coefficients sont classiquement entre 1.5 et 4, mais peuvent aller jusqu'à 10 sur les engins de levages pouvant mettre en jeu la vie d'usagers. La valeur du coefficient dépend de la maîtrise de son évaluation.

# Fatigue

Cas classique : sollicitations inférieures aux limites élastique mais avec un nombre important de charge-décharge ( $>1000$ ).

Causes : singularités géométriques (échelle  $\mu m$ ) qui cause des concentrations de contraintes locales qui génèrent des fissures qui se propagent.

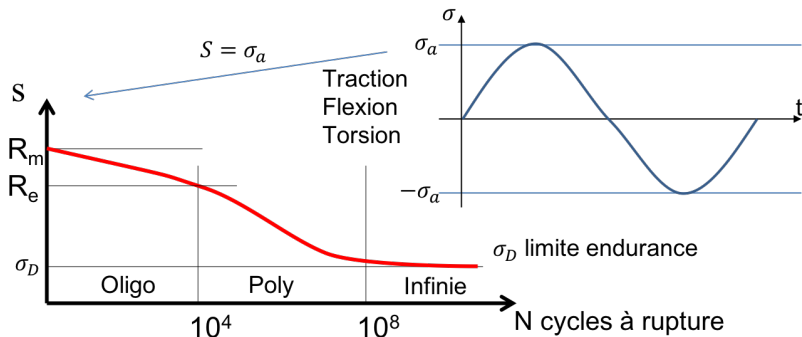
Plusieurs modélisations du phénomène existent, empiriques et analytiques suivant le type de sollicitation (en particulier du ratio contrainte/cycles).



## Courbe de Wöhler

Résultats empiriques : courbe de Wöhler

Conditions expérimentales : sollicitations sinusoïdale, contrainte homogène sur éprouvette, matériau homogène, conditions normalisée température état de surface.



## Contrainte limite d'endurance

On définit la contrainte  $\sigma_D$  au dessous de laquelle la durée de vie d'un matériau (en nombre de cycles) est infini.

- Alliages ferreux :  $\sigma_D$  existe.
- Alliages non ferreux :  $\sigma_D$  n'existe pas, par convention c'est la valeur pour une durée de vie de  $5 \cdot 10^8$  cycles.

Matériau	$\sigma_D$
Fontes et aciers moulés	$0.4R_m$
Aciers laminés	$0.5R_m$
Aciers haute résistance	$[0.3R_m, 0.4R_m]$
Alliages légers coulés	$0.3R_m$
Alliages légers	$0.4R_m$
Alliages de titane	$[0.3R_m, 0.6R_m]$

## Lois analytiques empiriques de fatigue

Loi de Basquin  $N \cdot S^m = C \rightarrow \log(N) = \log(C) - m \cdot \log(S)$

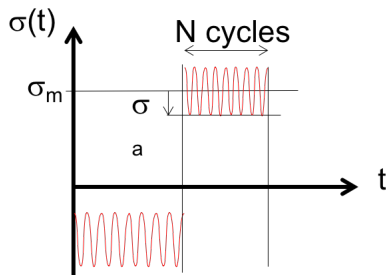
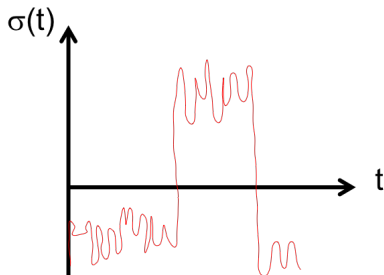
$$\text{Fer } \log(N) = 3 \left( 1 + \frac{\log\left(\frac{S}{0.9R_m}\right)}{\log\left(\frac{\sigma_D}{0.9R_m}\right)} \right)$$

$$\text{Non ferreux } \log(N) = 3 \left( 1 + 1.9 \frac{\log\left(\frac{S}{0.9R_m}\right)}{\log\left(\frac{\sigma_D}{0.9R_m}\right)} \right)$$



# Histoire du chargement

Pas un sinus parfait, niveaux de contrainte différents au cours du temps

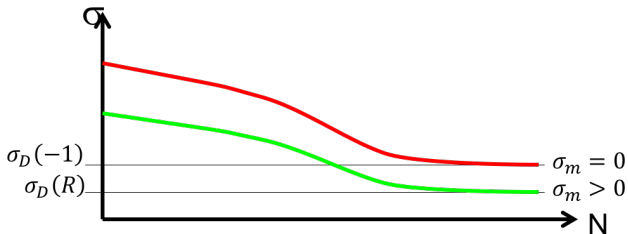


Sur chaque zone on définit :

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} \quad \text{et} \quad \sigma_{=} = \frac{\sigma_{min} + \sigma_{max}}{2}$$

## Modification de la courbe de Wöhler

En fonction de l'historique de sollicitation, on modifie la courbe de durée de vie potentielle.



Des lois empiriques de durée de vie sont proposées :

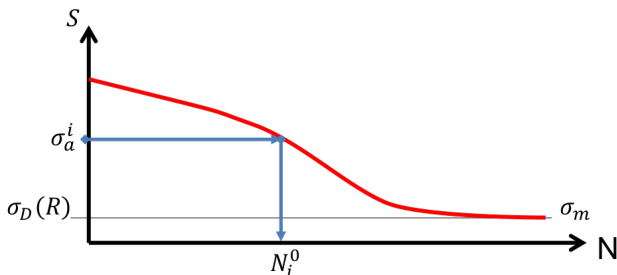
Etat de la structure

$$\text{Soderberg} \quad \frac{\sigma_D(R)}{\sigma_D(-1)} + \frac{\sigma_m}{R_e} = 1$$

$$\text{Goodman} \quad \frac{\sigma_D(R)}{\sigma_D(-1)} + \frac{\sigma_m}{R_m} = 1$$

$R$	$\sigma_m$	Etat
$> 0$	$> 0$	Traction
$> 0$	$< 0$	Compression
$< 0$	tous	Alternée

## Vérification de la tenue en fatigue



Chaque cycle d'amplitude  $\sigma_a^i$  de  $N_i$  cycles est associé à une valeur  $N_i^0$  de cycles admissibles.

On calcul l'endommagement par fatigue de chaque cycle :  $e_i = \frac{N_i}{N_i^0}$

L'endommagement sur la durée de vie complète est :  $e = \sum e_i$

On conclue alors :

$e < 1$  Pas d'endommagement par fatigue.

$e \geq 1$  Fissuration pouvant induire la rupture par fatigue.

# Types de dimensionnements

- 1 Généralités
- 2 Ansys
- 3 Modèles éléments finis en mécanique des solides
- 4 Dimensionnement mécanique
- 5 Modèles de résistance des matériaux**
- 6 Génération de maillages
- 7 Problèmes non linéaires
- 8 Modèles de résistance des matériaux
- 9 Analyse modale
- 10 Flambement
- 11 Résolution par méthodes de puissance

## Résistance des matériaux

Obtenus à partir des équations de la résistance des matériaux, ces dernières dérivées des équations de la mmc à l'aide d'hypothèses cinétiques et cinématiques.

Les degrés de liberté sont les déplacements du support géométrique (ligne moyenne par exemple) et les rotations de la matière transverse (fibre ou section transverse), assemblés dans un torseur cinématique.

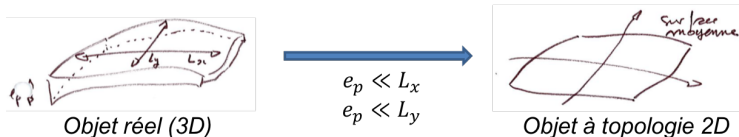
Les efforts sont traduits par le torseur de cohésion.

### Résistance des matériaux

- 2D - Eléments plaques et coques
- 1D - Eléments de poutres

## Géométrie des plaques

- Éléments structuraux minces suivants une direction.
- La géométrie est remplacée par un support à topologie surfacique → maillage surfacique topologie.



Rem : la surface moyenne est classiquement utilisée, mais il est quelque fois plus simple d'utiliser la surface inférieure ou supérieure (pour les composites multicouches par exemple).

Il existe deux modélisations :

- Plaque : la surface de description est plane et l'épaisseur est constante.
- Coque : la surface de description n'est pas plane et/ou l'épaisseur est variable.

## Comportement de la fibre épaisseur - plaque épaisse de Mindlin

### Fibre indéformable

Une fibre normale à la surface moyenne a une cinématique de solide rigide :

- Pas de raccourcissement ;
- Pas de flexion ;
- Pas de gauchissement.

Son mouvement est donc la superposition d'une translation et d'une rotation.

### Fibre normale - plaque mince de Kirchhoff

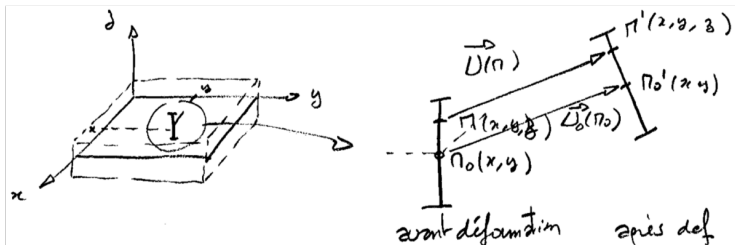
Dans le cas de plaque de très faible épaisseur ( $e_p \ll L/10$ ), le cisaillement transverse est négligeable. Cela a pour incidence qu'une fibre orthogonale à la surface moyenne avant déformation, le reste au cours de la transformation.

Cela conduit à :

- Une simplification du champ de contrainte car  $\tau_t = 0$ .
- On peut identifier les rotations de la fibre épaisseur avec les gradients du champ de déplacement transverse  $w(x, y)$ .



# Cinématique des plaques



Le champ de déplacements prend la forme

$$\vec{U}_M = \vec{U}_{M_0} + \vec{R} \left( M_0 \vec{M} \right)$$

En introduisant les rotations  $\theta_x$  et  $\theta_y$  autour des axes  $x$  et  $y$ , et sous les hypothèses des petites perturbations, le champ cinématique s'écrit :

$$\vec{U}_M = \begin{pmatrix} u_0(x, y) + z \cdot \beta_x(x, y) \\ v_0(x, y) + z \cdot \beta_y(x, y) \\ w_0(x, y) \end{pmatrix}$$

## Éléments plaques et coques

Topologie 2D

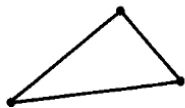
Cinématique déplacements ( $U, V, W$ ), et rotations de flexion ( $\theta_x, \theta_y$ ) aux noeuds.

Statique Torseur de cohésion aux noeuds ( $N_x, N_y, T_{xy}, T_{xz}, T_{yz}, Mf_x, Mf_y$ ).

Propriétés physiques Epaisseurs.

Matériau Relation de comportement et données matériaux.

Supports géométriques triangle, quadrangle.



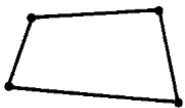
(3 noeuds)



(6 noeuds)



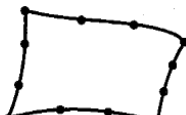
(9 noeuds)



(4 noeuds)

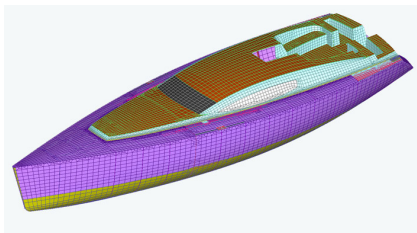


(8 noeuds)



(12 noeuds)

# Eléments plaques et coques - exemples



- 1 Généralités
- 2 Ansys
- 3 Modèles éléments finis en mécanique des solides
- 4 Dimensionnement mécanique
- 5 Modèles de résistance des matériaux
- 6 Génération de maillages**
- 7 Problèmes non linéaires
- 8 Modèles de résistance des matériaux
- 9 Analyse modale
- 10 Flambement
- 11 Résolution par méthodes de puissance

# Représentation d'un maillage

## Structure des données de maillage

Du point de vue de la structuration des données, un maillage est constitué d'une liste de coordonnées de noeuds (table des coordonnées) et de la liste des éléments décrit par une collection de noeuds (table des connectivités).

### Liste des noeuds

```
2411
1 1 1 11
7.8658D+01 -3.5735D+01 0.0000D+00
2 1 1 11
7.4658D+01 -3.5735D+01 0.0000D+00
...
```

### Liste des éléments

```
2412
180 115 1 1 7 8
213 214 240 239 369 370 396 395
181 115 1 1 7 8
214 215 241 240 370 371 397 396
...
```

Ces tables peuvent être générées manuellement (ou semi manuellement en utilisant des scripts) ou par construction géométrique (par exemple par extrusion).

# Les maillages libres

## Algorithmes de génération automatique

Des algorithmes génèrent de façon automatique une discrétisation de la géométrie. Le triangle et le tétraèdre sont les seules formes qui assurent la fermeture géométrique.

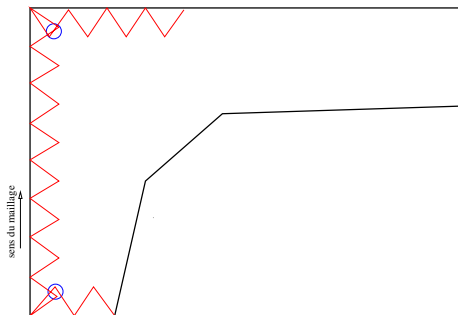
Il existe trois type de stratégies :

- frontale :  
on remplit l'espace géométrique depuis l'extérieur vers l'intérieur, cela produit des mailles déformées au centre.
- arbre :  
on génère des boites englobantes de la géométrie que l'on découpe successivement jusqu'à avoir une taille adéquate.
- Voronoï :  
on remplit l'espace intérieur d'un nuage de points que l'on associe ensuite avec des cellules de Voronoï. On génère ensuite une maille entre chaque noeuds contigus

Un lissage du maillage doit être réalisé, par une technique de triangulation de Delaunay ou par une relaxation élastique.

## Méthodes frontales

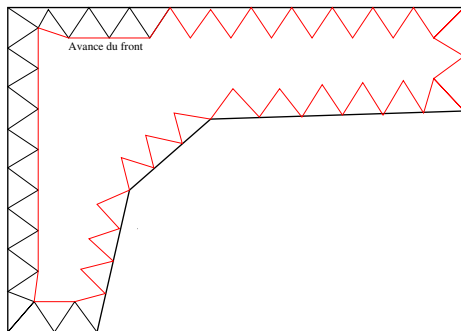
La méthode frontale consiste à mailler le domaine, de la façon la plus régulière possible en respectant une taille imposée par l'opérateur, depuis la frontière (ligne ou surface) vers l'intérieur jusqu'à remplissage complet du domaine.



L'algorithme adapte les tailles et fait disparaître les noeuds surnuméraires, mais n'est pas exempt de défaut en particulier sur la fin du processus.

## Méthodes frontales

La méthode frontale consiste à mailler le domaine, de la façon la plus régulière possible en respectant une taille imposée par l'opérateur, depuis la frontière (ligne ou surface) vers l'intérieur jusqu'à remplissage complet du domaine.

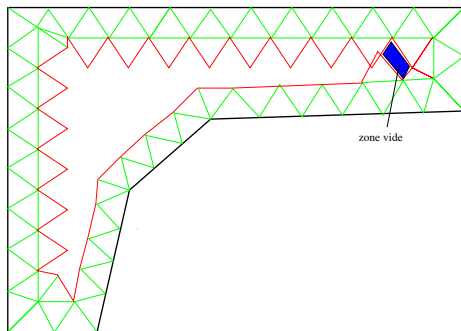


L'algorithme adapte les tailles et fait disparaître les noeuds surnuméraires, mais n'est pas exempt de défaut en particulier sur la fin du processus.



## Méthodes frontales

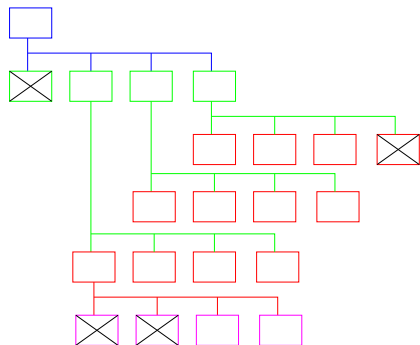
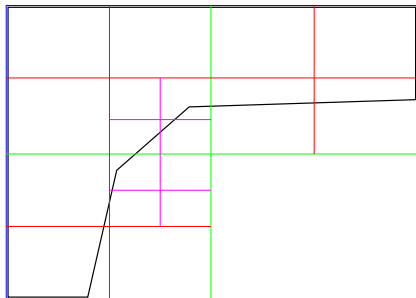
La méthode frontale consiste à mailler le domaine, de la façon la plus régulière possible en respectant une taille imposée par l'opérateur, depuis la frontière (ligne ou surface) vers l'intérieur jusqu'à remplissage complet du domaine.



L'algorithme adapte les tailles et fait disparaître les noeuds surnuméraires, mais n'est pas exempt de défaut en particulier sur la fin du processus.

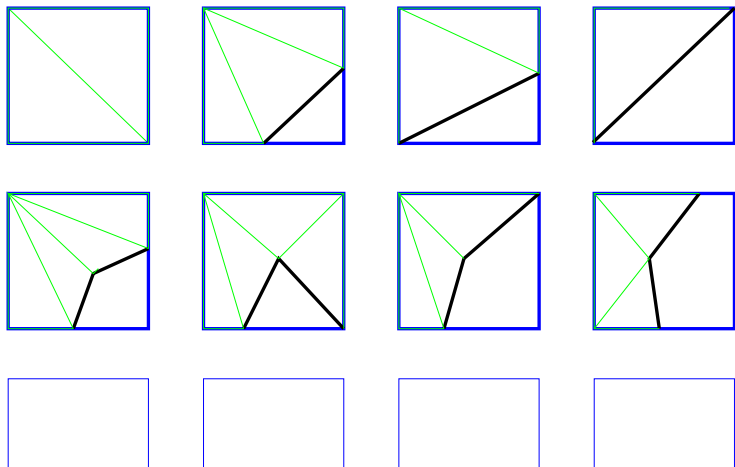
## Arbre de construction

Le domaine est d'abord enfermé dans une boîte englobante. Cette boîte est découpée suffisamment de fois pour atteindre une taille imposée par l'opérateur et pour capter chaque point géométrique.



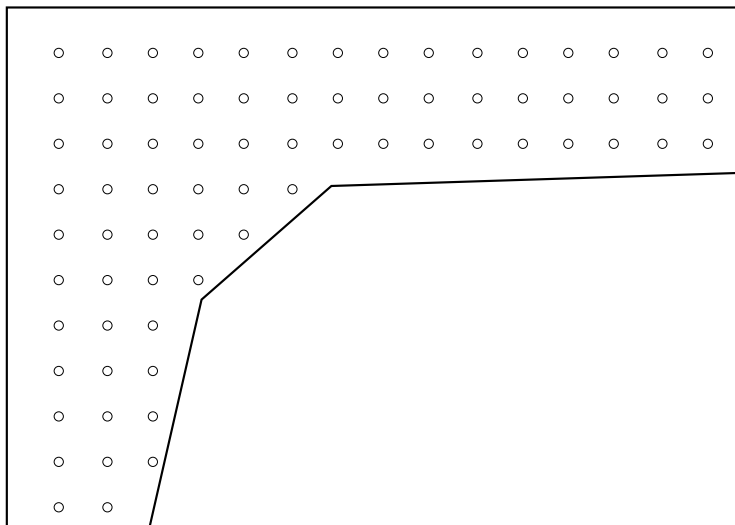
## Arbre de construction

Les boîtes sont ensuite maillées à l'aide de motifs prédéfinis. Ces motifs imposent de plus un niveau de découpage de façon à assurer les transitions entre domaines fins et grossiers.



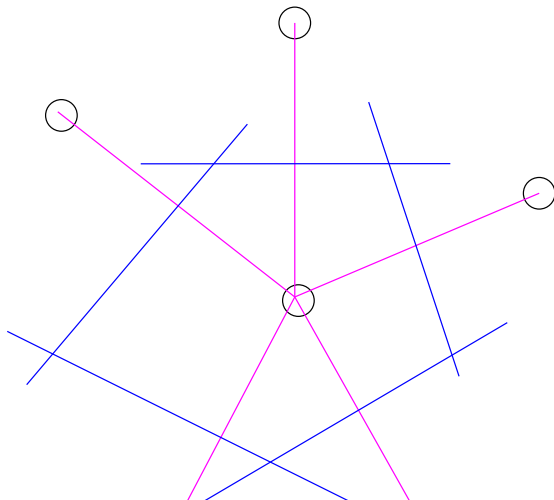
## Cellule de Voronoï

Le domaine est rempli d'un nuage de points disposés aléatoirement.



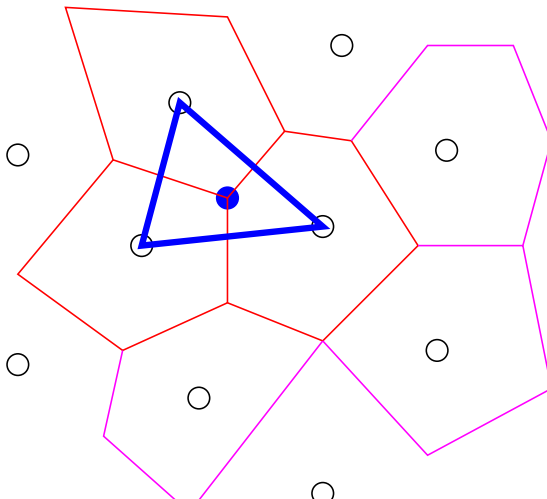
## Cellule de Voronoï

Des cellules de Voronoï sont construites autour de chaque point afin de définir le voisinage de chaque point.



## Cellule de Voronoï

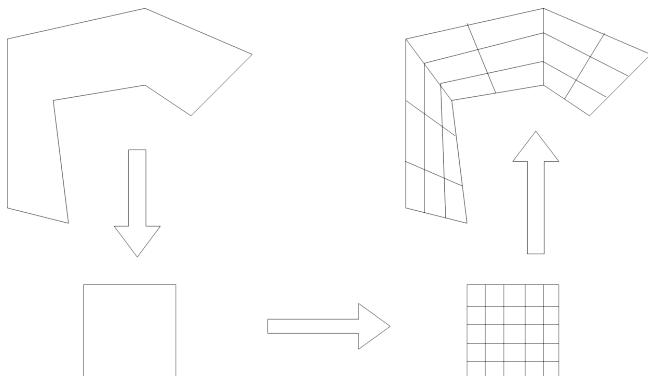
Un élément est alors construit entre les points des cellules de Voronoï formant trois voisinages concomitants.



## Projection transfini

On parle de maillage réglé ou transfini. Il consiste à associer une forme de référence facile à mailler à la forme réelle.

C'est la seule façon de réaliser des maillages hexaédrique et carré contrôlés.

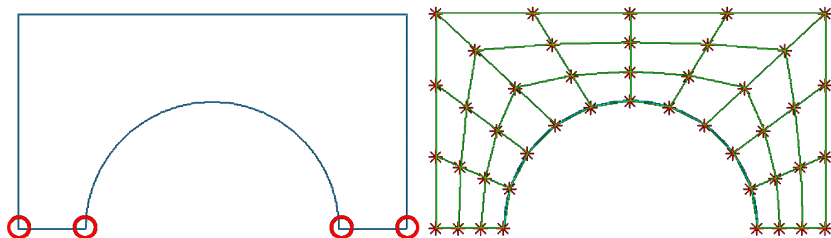


## Maillage régulier

Il faut faire attention à la manière d'associer les domaines réels aux domaines de référence.

Certaines transformations induisent des déformations localisées importantes.

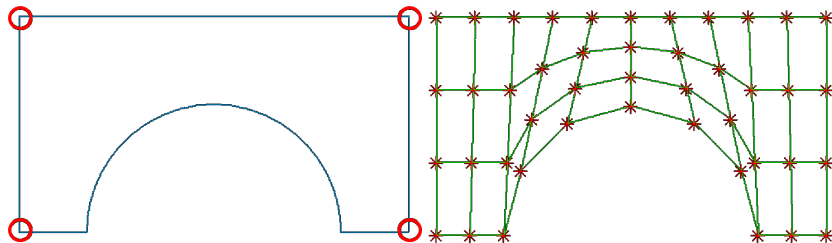
Sur l'exemple de l'arche, si l'on choisit les points inférieurs comme base de référence, le maillage subit une déformation d'ensemble, ce qui conduit à un maillage relativement régulier.





## Maillage déformé

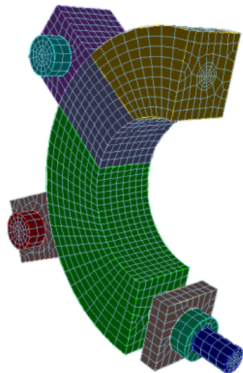
Si l'on choisit les points extrêmes, de façon à englober la pièce, cela induit une déformation localisée sur un côté du maillage. Certaines mailles n'assureront pas l'unicité de la transformation (i.e. des éléments avec des Jacobiens changeant de signe).



## Découpage des pièces

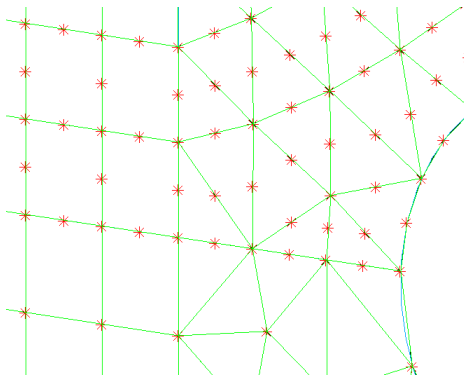
Les partitions sont des découpages virtuels qui permettent de décomposer la pièce à mailler complexe en une combinaison de pièces simples : en particulier pouvant être maillées de façon réglée.

Les frontières sont de type ligne ou surface. Ces frontières assurent (imposent) la continuité des maillages.



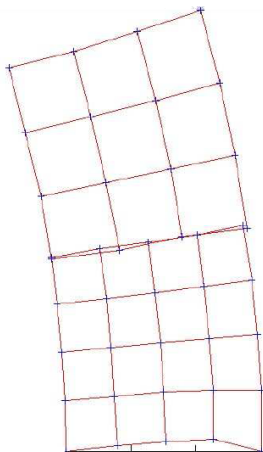
# Compatibilité des maillages

Il faut assurer la compatibilité des maillages.



## Maillages incompatibles

Il existe des stratégies de collage de maillages non compatibles, non actuellement utilisées de façon classique dans les codes industriels, mathématiquement simples mais délicates à mettre en oeuvre techniquement.



## Degré des éléments

Les éléments finis s'appuient sur des monômes de Pascal.

$$\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ x & y & & \\ x^2 & xy & y^2 & \\ x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 \\ \dots & & & \end{array}$$

Théoriquement les degrés sont infinis, mais dans la pratique seuls les degrés 1 et 2 sont utilisés, rarement degré 3.

# Eléments Serendip

## Serendipity

mot inventé en 1754 par le philosophe anglais Sir Horatio WALPOLE, qualifie la faculté à trouver la bonne information par hasard. Le mot provient du roman "The three princes of Serendib" à qui le hasard apportait la solution à des situations fâcheuses.

Les éléments à base carrée sont de type Serendip : on fait disparaître un noeud interne par rapport aux éléments de Hermite, ce qui implique une certaine forme de base polynomiale.

Les éléments de degrés supérieurs à 1 sont très sensibles aux déformations de maillages.

## Critères géométriques

Il existe des critères géométriques afin d'évaluer la qualité des éléments du maillage réalisé. Ces critères quantifient l'écart entre la valeur théorique, basée sur un élément géométriquement parfait, et la valeur de l'élément du maillage.

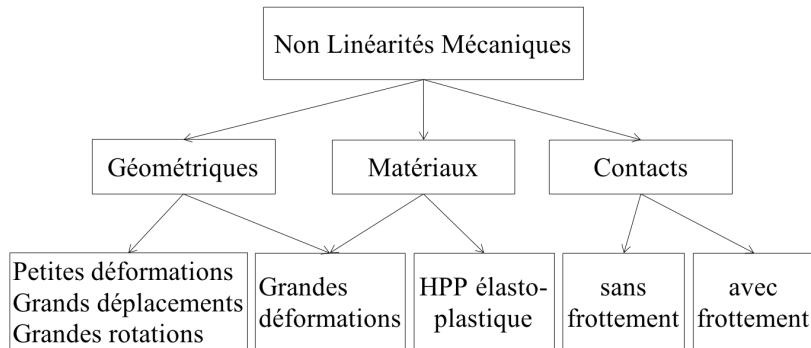
Seuls les isomorphismes respectent cela : translation, rotation et allongements proportionnels.

Quality Check	Threshold
<input type="checkbox"/> Skew	>  90
<input type="checkbox"/> Warp	>  30
<input type="checkbox"/> Taper	>  0.5
<input type="checkbox"/> Aspect Ratio	>  10
<input type="checkbox"/> Distortion	<  0.7
<input type="checkbox"/> Stretch	<  0.3
<input type="checkbox"/> Jacobian	< 10
<input type="checkbox"/> Element Size	Both <input type="text" value="0.1"/> <input type="text" value="10"/>
<input type="checkbox"/> Use height for linear tri and quad	
<input type="checkbox"/> Quad Inc Angles	Both <input type="text" value="45"/> <input type="text" value="135"/>
<input type="checkbox"/> Tri Inc Angles	Both <input type="text" value="15"/> <input type="text" value="105"/>

- 1 Généralités
- 2 Ansys
- 3 Modèles éléments finis en mécanique des solides
- 4 Dimensionnement mécanique
- 5 Modèles de résistance des matériaux
- 6 Génération de maillages
- 7 Problèmes non linéaires**
- 8 Modèles de résistance des matériaux
- 9 Analyse modale
- 10 Flambement
- 11 Résolution par méthodes de puissance



# Problèmes non linéaires



# Problèmes non linéaires

## Non linéarités géométriques

- Les déplacements/rotations sont grands  $\rightarrow$  modification du domaine.
- Les déformations sont grandes  $\rightarrow$  conservation des termes du second ordre

## Non linéarités matériaux

- Comportements élastique non linéaire.
- Comportement plastiques.
- Matériaux hyper-élastiques.

## Non linéarités de contact

- Les déplacements/rotations sont « contrôlés »  $\rightarrow$  Modification des conditions aux limites.
- Les efforts de contact dépendent du problème  $\rightarrow$  Modification du second membre.

## Formulations et mesures suivant le type de non linéarité traitée

Type	Hypothèses	Formulation	Mesures
Matériau	hpp rdc non lin.	Material Non Linear Only	$\sigma$ $\epsilon$
Grands dép. Petites déf.	$[\nabla U]$ négl. rdc lin. ou non	Total Lagrange Update Lagrange	$\sigma$ et $\epsilon_A$ $S$ et $E$
Grands dép. Grandes déf.	hors hpp rdc lin. ou non	Total Lagrange Update Lagrange	$\sigma$ et $\epsilon_{log}$ $S$ et $E$

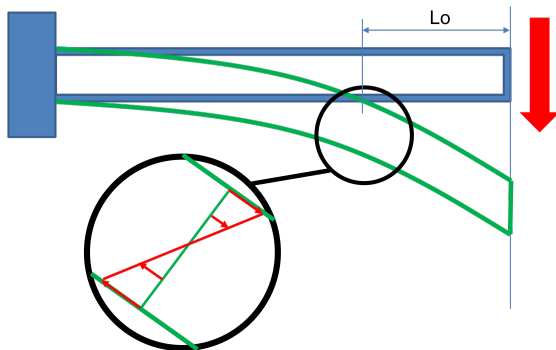
## Mesures de Contraintes :

- $\sigma$  Cauchy
- $S$  Piola-Kirchhoff

## Mesures de déformations

- $\epsilon$  linéarisée
- $\epsilon_A$  Almansi
- $E$  Green-Lagrange
- $\epsilon_{log}$  Hencky-Mises

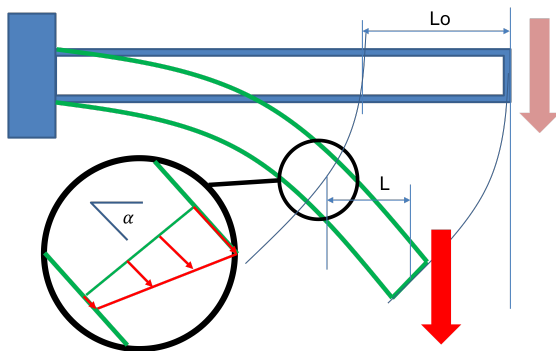
## Flexion d'une poutre, modélisation linéaire



- Contrainte de flexion :  $\sigma = y \cdot \frac{L_0 \cdot F}{I_{gz}}$
- Contrainte de cisaillement :  $\tau = \frac{F}{S}$

Contrainte équivalente de Von Mises :  $\sigma_{VM}^2 = \sigma^2 + 3 \cdot \tau^2$

# Flexion d'une poutre, modélisation non linéaire géométrique



- Contrainte de traction et flexion :  $\sigma = \frac{F \cdot \sin(\alpha)}{S} + y \cdot \frac{L \cdot F}{I_{gz}} \simeq \frac{F \cdot \sin(\alpha)}{S} + y \cdot \frac{L_0 \cdot F \cdot \cos(\alpha)}{I_{gz}}$
- Contrainte de cisaillement :  $\tau = \frac{F \cdot \cos(\alpha)}{S}$

# Non linéarité géométrique

## Particularité

- Les déplacements et les rotations sont grands.  $\rightarrow$  Modification du domaine.
- Les déformations sont grandes.  $\rightarrow$  Conservation des termes du second ordre.

L'équation d'équilibre du milieu continu

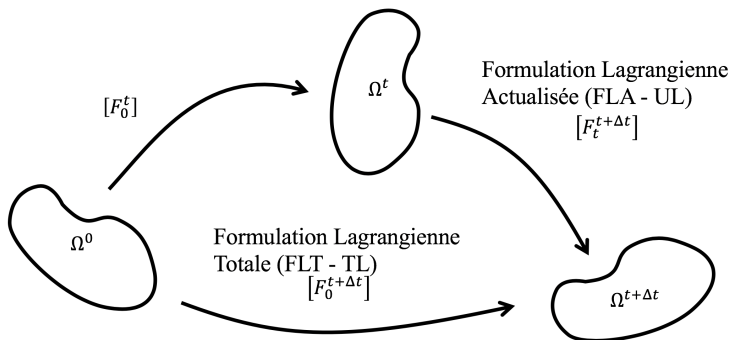
$$\operatorname{div}([\sigma]) + \vec{f}_v = \vec{0}$$

et affaiblie par une formulation variationnelle

$$-\int_{\Omega} \operatorname{tr}(\nabla \vec{U}^* \cdot \sigma) dV + \int_{\Omega} (\vec{U}^* \cdot \vec{f}_v) dV + \int_{\partial\Omega_F} (\vec{U}^* \cdot \vec{f}_s) dS = 0$$

On impose  $\vec{U} = \vec{U}_d$  et  $\vec{U}^* = \vec{0}$  sur  $\partial\Omega_U$  avec  $\nabla \vec{U}^* = \frac{\partial \vec{U}^*}{\partial x^{i+\Delta t}}$

## Cinématiques des solides déformables



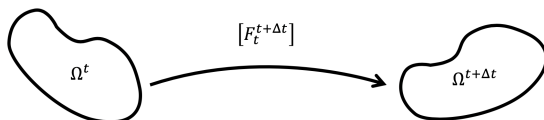
On a

$$\frac{\partial \mathbf{x}^{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{x}^0} = \frac{\partial \mathbf{x}^{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{x}^t} \frac{\partial \mathbf{x}^t}{\partial \mathbf{x}^0}$$

donc

$$[F_0^{t+\Delta t}] = [F_t^{t+\Delta t}] [F_0^t]$$

## Changement de référentiel



La relation de changement de référentiel

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^{t+\Delta t}} = \frac{\partial u^*}{\partial x^t} \frac{\partial x^t}{\partial x^{t+\Delta t}} = [F^*] \cdot [F_t^{t+\Delta t}]^{-1}$$

permet d'exprimer l'équilibre sur la configuration actuelle à partir d'un état précédent

$$W_{int} = - \int_{\Omega^{t+\Delta t}} \text{tr} \left( \nabla \vec{U}^* \cdot \sigma \right) dV = - \int_{\Omega^t} \text{tr} \left( E^* \cdot S_t^{t+\Delta t} \right) dV$$

On doit pour cela introduire la contrainte de Piola-Kirchhoff de seconde espèce  $S_t^{t+\Delta t}$  et le champ des déformations virtuelles

$$E^* = \frac{1}{2} \cdot \text{tr} \left( [F_t^{t+\Delta t}]^T \cdot [F^*] + [F^*]^T \cdot [F_t^{t+\Delta t}] \right)$$



# Forces extérieures

## Force conservative

- Indépendante de l'évolution du domaine.
- Vecteur force constant.

## Force suivieuse

- Modifié par l'évolution du domaine.
- Vecteur force variable.

## Mesures des contraintes

La mesure de contrainte doit être adaptées à l'étude traitée :

Cauchy	$\sigma^{t+\Delta t}$
Kirchhoff	$\tau_t^{t+\Delta t} = \sigma^{t+\Delta t} \cdot \det([F_t^{t+\Delta t}])$
Piola-Kirchhoff I	$T_t^{t+\Delta t} = [F_t^{t+\Delta t}]^{-1} \cdot \tau_t^{t+\Delta t}$
Piola-Kirchhoff II	$S_t^{t+\Delta t} = T_t^{t+\Delta t} \cdot [F_t^{t+\Delta t}]^{-T}$
Co-rotationnelle	$\sigma_R = [R_t^{t+\Delta t}]^T \cdot \sigma^{t+\Delta t} \cdot [R_t^{t+\Delta t}]$

## Mesures des déformations

On cherche des lois de comportement objectives permettant de décrire le matériau :

$$\sigma^{t+\Delta t} = H(\epsilon^{t+\Delta t})$$

ou

$$S^{t+\Delta t} = H(E_t^{t+\Delta t})$$

Ces lois nécessitent l'introduction de mesures de déformations adaptées :  
Déformation ingénieur

$$\epsilon^{t+\Delta t}$$

Green-Lagrange

$$E_t^{t+\Delta t} = \frac{1}{2} \text{tr} \left( \left[ F_t^{t+\Delta t} \right]^T \cdot \left[ F_t^{t+\Delta t} \right] - [I] \right)$$

## Formulation éléments finis

On écrit l'équilibre sur une configuration  $\Omega^t$  connue

$$W_{int} = - \int_{\Omega^t} tr \left( E^* \cdot S_t^{t+\Delta t} \right) dV = - \langle U^* \rangle \cdot \{R\}$$

On doit alors exprimer le tenseur des déformations de Green-Lagrange

$$\{E_t^{t+\Delta t}\} = \left( [B_L] + [B_{NL} \{U_t^{t+\Delta t}\}] \right) \cdot \{U_t^{t+\Delta t}\}$$

et le tenseur des déformations virtuelles

$$\{E^*\} = \left\{ \delta E_t^{t+\Delta t} \right\} = \left( [B_L^*] + [B_{NL}^* \{U_t^{t+\Delta t}\}] \right) \cdot \{U^*\}$$

Ce qui donne

$$\{R\} = \int_{\Omega^t} ([B_L^*] + [B_{NL}^*])^T \cdot [H] \cdot ([B_L] + [B_{NL}]) \cdot \{U_t^{t+\Delta t}\} dV$$

## Résolution non linéaire

On construit un processus itératif  $\{U^i\}$  dont la limite  $\{U^\infty\}$  correspond au champ de déplacement  $\{U_t^{t+\Delta t}\}$ .

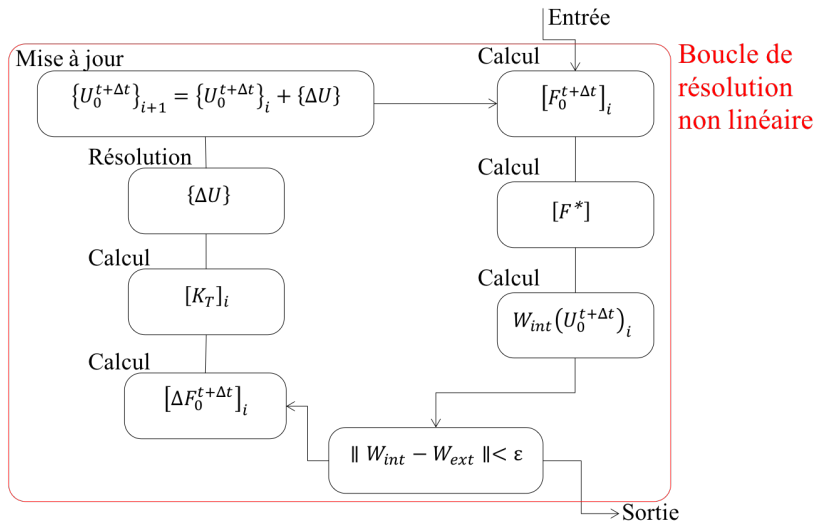
Un développement au premier ordre nous permet d'écrire :

$$R(U^{i+1}) = R(U^i + \Delta U) \simeq R(U^i) + \frac{\partial R(U^i)}{\partial U} \cdot \Delta U$$

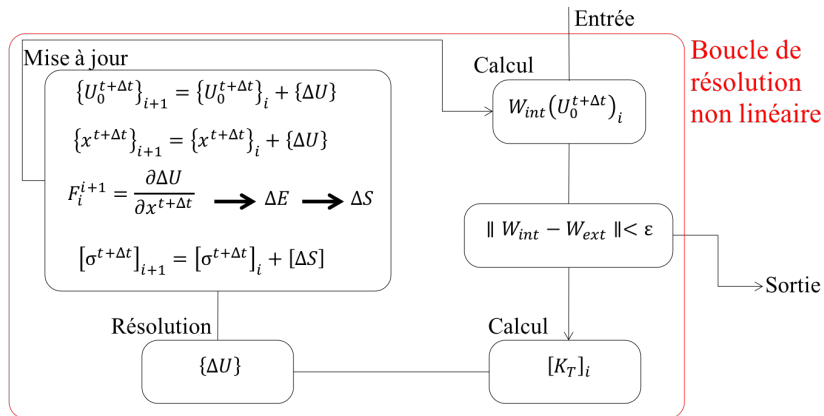
On réalise les opérations suivantes

- 1 Calcul du résidu  $\{R\} = \{R(U^i)\}$ .
- 2 Test : si  $\|R\| < \epsilon_{rr}$ , fin du processus.
- 3 Calcul de la matrice tangente  $[K_T] = \frac{\partial R(U^i)}{\partial U}$ .
- 4 Résolution du système linéaire  $[K_T] \cdot \{\Delta U\} = -\{R\}$ .
- 5 Mise à jour  $\{U^{i+1}\} = \{U^i\} + \{\Delta U\}$ .
- 6 Retour en 1.

## Formulation Lagrangienne Totale



## Formulation Lagrangienne Actualisée



- 1 Généralités
- 2 Ansys
- 3 Modèles éléments finis en mécanique des solides
- 4 Dimensionnement mécanique
- 5 Modèles de résistance des matériaux
- 6 Génération de maillages
- 7 Problèmes non linéaires
- 8 Modèles de résistance des matériaux**
- 9 Analyse modale
- 10 Flambement
- 11 Résolution par méthodes de puissance



# Eléments de poutre

**Topologie** 1D

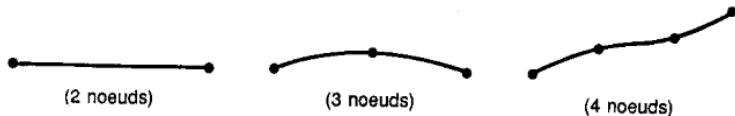
**Cinématique** déplacements ( $U, V, W$ ), , rotations de flexion ( $\theta_y, \theta_z$ ) et rotations de torsion ( $\theta_x$ ) aux noeuds.

**Statique** Torseur de cohésion aux noeuds ( $N_x, T_y, T_z, Mt_x, Mf_y, Mf_z$ ).

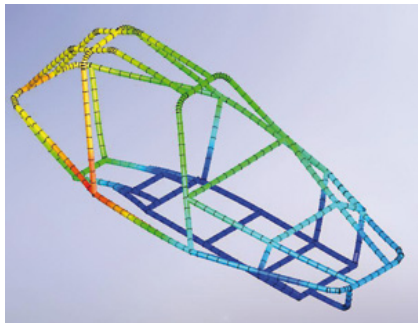
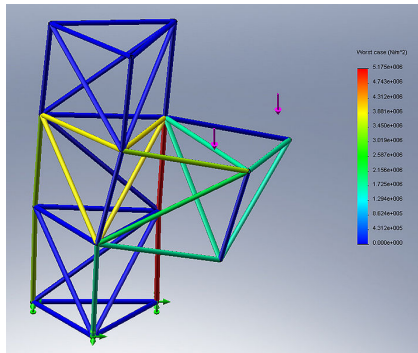
**Propriétés physiques** Sections (aires et moments quadratiques).

**Matériau** Relation de comportement et données matériaux.

**Supports géométriques** linéique.



# Éléments de poutre - exemple



# Modèles rhéologiques

Éléments utilisés classiquement et régulièrement.

Dont les spécifications sont rhéologiques (comportementales) avec des supports géométriques n'étant pas forcément définis.

## Modèles rhéologiques

- Éléments ressorts
- Éléments rigides
- Éléments de masses

## Eléments ressort

Topologie 0D (ponctuelle)

Cinématique déplacements ( $U, V, W$ ), et rotations ( $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ ) aux noeuds.

Statique Torseur aux noeuds ( $F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z$ ).

Propriétés physiques Raideurs axiales et raideurs de rotations.

Matériau -

Supports géométriques -

Topologie 1D (linéaire)

Cinématique Déplacements ( $u$ ) aux noeuds.

Statique Force axiale ( $F_x$ ) aux noeuds.

Propriétés physiques Raideur axiale.

Matériau -

Supports géométriques linéique à deux noeuds.

# Eléments rigides

Topologie -

Cinématique Déplacements ( $U, V, W$ ), et rotations ( $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ ) au noeud support (maître).

Statique Torseur statique au noeud support ( $F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z$ ).

Propriétés physiques -

Matériau -

Supports géométriques un noeud support (maître) et autant d'autre noeuds que nécessaire (esclaves).

# Eléments de masses

Topologie 0D

Cinématique déplacements ( $U, V, W$ ), et rotations ( $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ ) au noeud.

Statique -

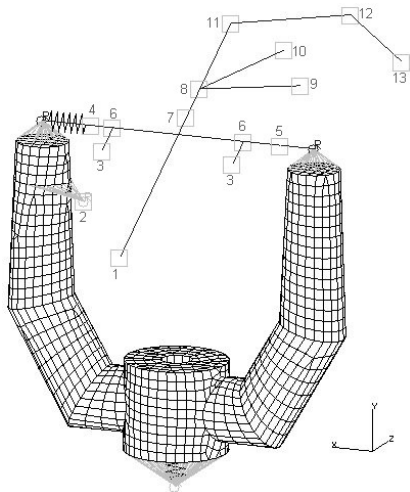
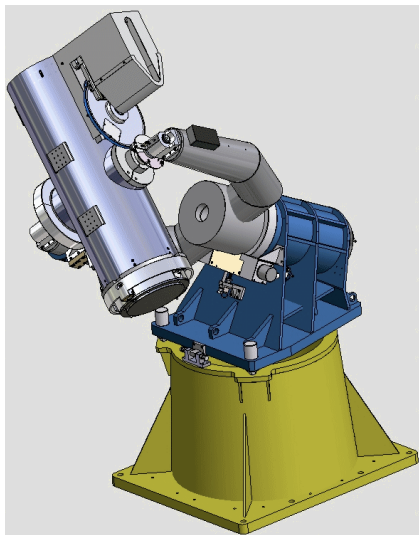
Propriétés physiques Masse et moments d'inerties.

Matériau -

Supports géométriques -

## Modèles rhéologiques - exemples

### Modélisation du télescope TAROT (CNRS - La Silla - Chili)



- 1 Généralités
- 2 Ansys
- 3 Modèles éléments finis en mécanique des solides
- 4 Dimensionnement mécanique
- 5 Modèles de résistance des matériaux
- 6 Génération de maillages
- 7 Problèmes non linéaires
- 8 Modèles de résistance des matériaux
- 9 Analyse modale**
- 10 Flambement
- 11 Résolution par méthodes de puissance



## Equilibre dynamique

On se place dans le cadre de l'analyse linéaire.

### hypothèse des petites perturbations (HPP)

- petits déplacements et petites déformations
- élasticité linéaire
- forces conservatrices

On a alors :

$$W_{int} + W_{ext} = W_{acc} \quad \text{avec} \quad W_{acc} = \delta U^T \cdot M \cdot \ddot{U}$$

La matrice de masse  $M$  vient de l'interpolation de  $\ddot{U}(x, t) = \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2}$  sur le même espace que  $U(x, t)$ .

$M$  est une matrice symétrique, définie et positive.

## Matrice de masse de l'élément de barre

Si l'on prend l'exemple de l'élément linéaire de traction compression à deux noeuds, la partie dynamique est donnée par l'expression

$$W_{acc} = \int_{x=0}^{x=L} \delta u(x) \cdot \rho S \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} dx$$

avec

$$\ddot{u}(x, t) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) \cdot \ddot{u}_1(t) + \frac{x}{L} \cdot \ddot{u}_2(t)$$

aussi

$$W_{acc} = \langle \delta u_1 \quad \delta u_2 \rangle [M] \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix}$$

et

$$[M] = \frac{\rho S L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

## Modes propres

On cherche la solution homogène de cette équation différentielle ordinaire.

$$K \cdot U(t) + M \cdot \ddot{U}(t) = 0$$

La solution générale est recherchée sous forme harmonique :  $U(t) = V \cdot e^{j\omega t}$

- $V$  est le mode de vibration, la forme géométrique ;
- $f = \frac{\omega}{2\pi}$  est la fréquence de vibration.

On cherche à résoudre :

$$(K - \omega^2 \cdot M) \cdot V = 0 \quad \text{avec} \quad V \neq 0$$

On va donc obtenir  $(\omega_i, V_i)$ , les fréquences (pulsations) et modes propres. On a  $N$  modes propres (éventuellement multiples), avec  $N$  la taille des matrices  $K$  et  $M$ .

On utilise fréquemment une procédure d'itérations inverses.

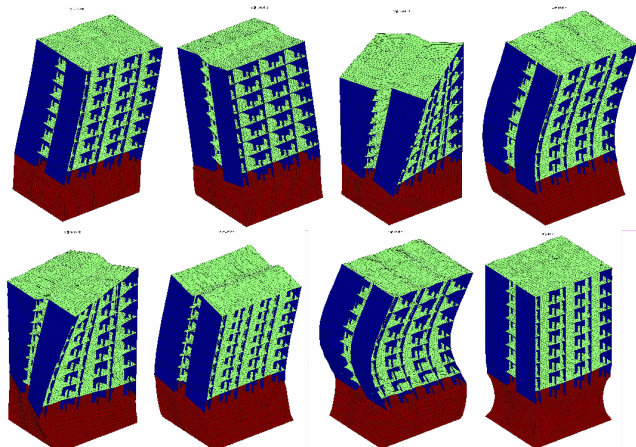
- méthode des puissances (depuis les hautes fréquences) ;
- méthode inverse (depuis les basses fréquences).

Les modes sont normés, donc sans amplitude. Les sollicitations extérieures induisent l'amplitude des vibrations.

## Analyse modale des bâtiments

L'analyse modale des bâtiments peut avoir pour motivation

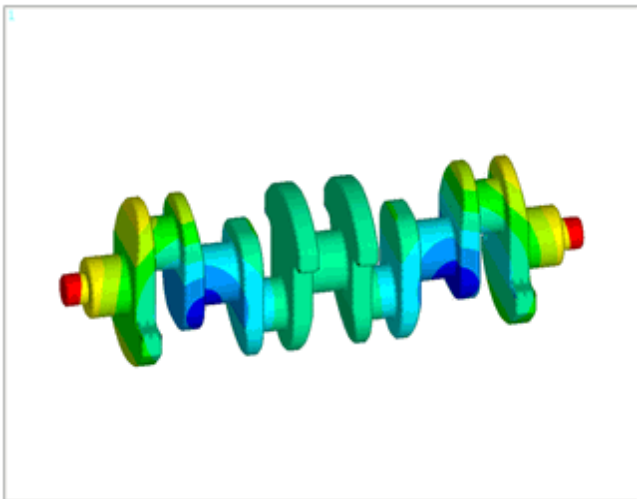
- l'évaluation de la réponse du bâtiment à une sollicitation sismique, vérification en dimensionnement critique (ELU)
- l'évaluation des vibrations du bâtiment soumis à une charge dynamique permanente (vent ou matériel mécanique), vérification en fonctionnement (ELS)



## Analyse modale d'un vilebrequin

Obtenir les modes propres d'un vilebrequin peut avoir pour motivation

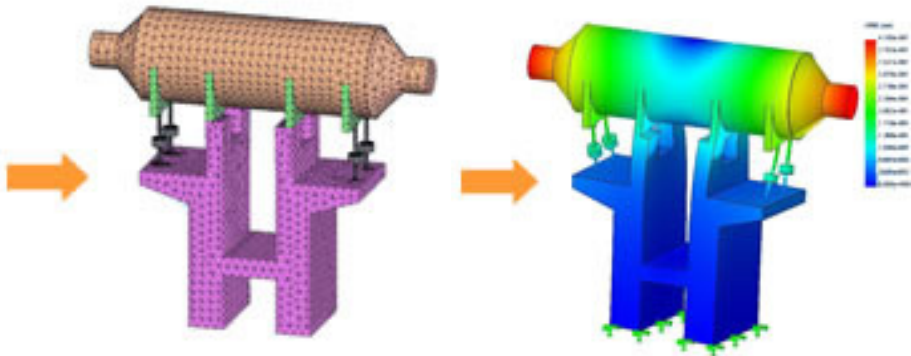
- évaluation des modes de vibration
- dimensionnement d'usage



## Analyse modale d'une turbine

Chercher les modes propres d'une turbine permet :

- l'évaluation des modes de vibration en fonctionnement ;
- le dimensionnement d'usage ;
- les charges sur la plateforme.



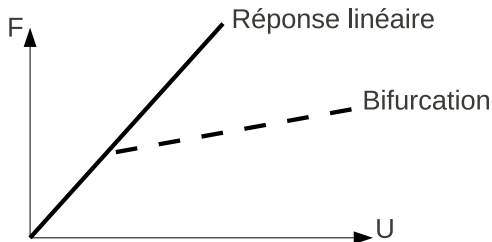
- 1 Généralités
- 2 Ansys
- 3 Modèles éléments finis en mécanique des solides
- 4 Dimensionnement mécanique
- 5 Modèles de résistance des matériaux
- 6 Génération de maillages
- 7 Problèmes non linéaires
- 8 Modèles de résistance des matériaux
- 9 Analyse modale
- 10 Flambement**
- 11 Résolution par méthodes de puissance

## Bifurcation mécanique

Le flambement est un mode de déformation critique qui s'applique à des structures élancées soumises à de la compression. Il s'agit du passage brusque d'un état de compression à un état de flexion.

Cette déformation est due en majeure partie au phénomène de rotation du tenseur des contraintes lors de la déformation.

Le flambement est un mode de défaillance qui correspond à un état singulier de l'équilibre mécanique → plusieurs possibilités de réponses peuvent être suivies par la structure : bifurcation.





## Flambement Rotule - Rotule

$$M_{fz} = -y(x) \cdot F$$

$$E \cdot I \cdot y''(x) = M_{fz}$$

$$y'' + \omega^2 \cdot y = 0 \quad \text{avec} \quad \omega^2 = \frac{F}{E \cdot I}$$

$$y(x) = A \cdot \cos(\omega \cdot x) + B \cdot \sin(\omega \cdot x)$$

$$y(0) = 0 \quad \text{implique} \quad A = 0$$

$$y(L) = 0 \quad \text{implique} \quad B \cdot \sin(\omega \cdot L) = 0$$

$$\omega \cdot L = k \cdot \pi$$

$$F = k^2 \cdot \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L^2}$$

## Flambement Encastrée - Libre

$$M_{fz} = (y(L) - y(x)) \cdot F$$

$$y'' + \omega^2 \cdot y = \omega^2 \cdot y(L)$$

$$y(x) = A \cdot \cos(\omega \cdot x) + B \cdot \sin(\omega \cdot x) + \omega^2 \cdot y(L)$$

$$y(0) = 0 \quad \text{implique} \quad A = -\omega^2 \cdot y(L)$$

$$y'(0) = 0 \quad \text{implique} \quad B = 0$$

$$y(x) = \frac{F \cdot y(L)}{E \cdot I} (1 - \cos(\omega \cdot x))$$

$$\cos\left(\frac{L}{E^2 \cdot I^2} \cdot F^2\right) = 1 - \frac{E \cdot I}{F}$$

## Matrice de raideur géométrique

La matrice des raideurs tangentes d'une structure traduit une linéarisation du comportement autour d'un point d'équilibre.

Cette matrice peut se décomposer sous la forme d'une somme de trois composantes :

### Matrice de raideur tangente

$$K_{NL}(U) = K_L + K_G(U) + K_\sigma(U)$$

- $K_L$  est la partie linéaire du comportement mécanique ;
- $K_G$  est la partie associée aux grandes déformations ;
- $K_\sigma$  traduit les grands déplacements.

C'est la modification de la matrice  $K_\sigma$  lors de la déformation qui produit le bifurcation.

## Flambement linéaire

On s'intéresse généralement au flambement linéaire : transition depuis l'état linéaire à l'état non linéaire

En effet, après une déformation par flambement, il y a presque systématiquement défaillance de la structure.

Cette hypothèse permet ainsi d'affirmer qu'avant la bifurcation, le comportement est linéaire et vérifie

$$K.U_0 = F_0$$

On cherche la transition de l'état linéaire à l'état non linéaire en augmentant l'effort de référence :

$$F_{ext} = \lambda \cdot F_0$$

$\lambda$  est le facteur de charge.

## Facteur de charge critique

Au moment du flambement, le système doit vérifier l'expression non linéaire de l'équilibre :

$$[K_{NL}(U)] \cdot U = F_{ext}$$

Mais comme on est à la limite de l'état linéaire, on vérifie aussi

$$U = \lambda \cdot U_0$$

Les grandes déformations sont négligées, aussi obtient-on le système :

$$[K_L] \cdot \lambda \cdot U_0 + [K_\sigma(\lambda \cdot U_0)] \cdot \lambda \cdot U_0 = \lambda \cdot F_0$$

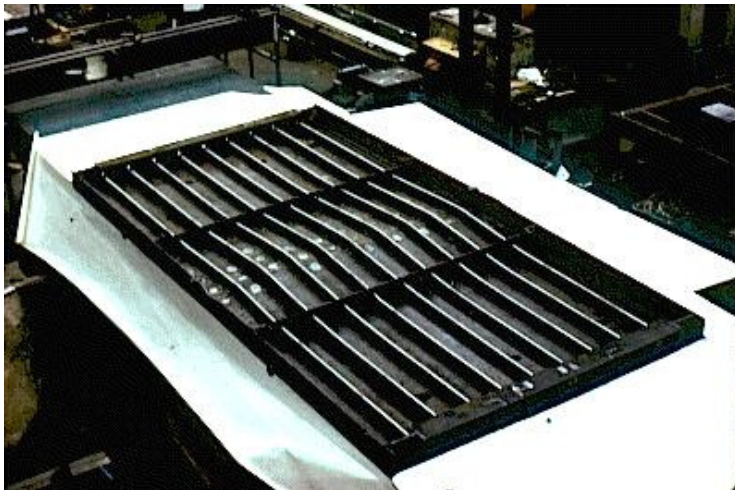
ce qui s'écrit encore

$$[K_L + \lambda \cdot K_\sigma(U_0)] \cdot U_0 = F_0$$

La notion de bifurcation se traduit mathématiquement par une matrice singulière. On cherche donc les valeurs critiques  $\lambda_c$  pour lesquelles on a

$$\det([K_L] + \lambda_c \cdot [K_\sigma(U_0)]) = 0$$

# Exemples de flambement



Flambement global de poutres encastées - encastées

# Exemples de flambement



Flambement local du voile de la poutre

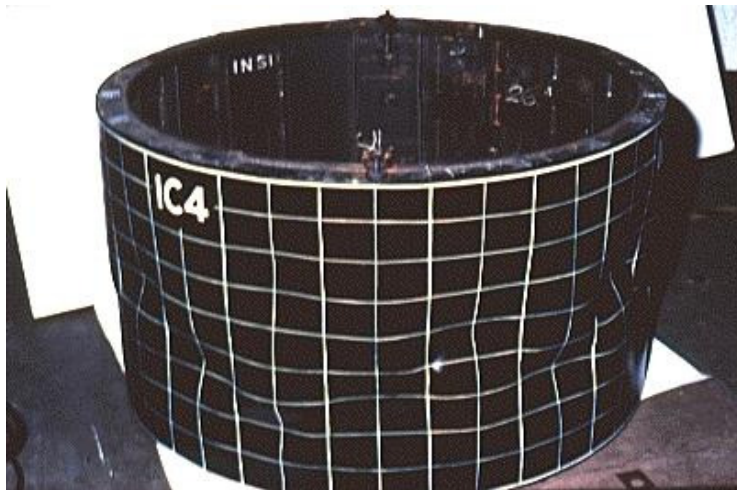
# Exemples de flambement



Flambement global de l'ame de la poutre



# Exemples de flambement



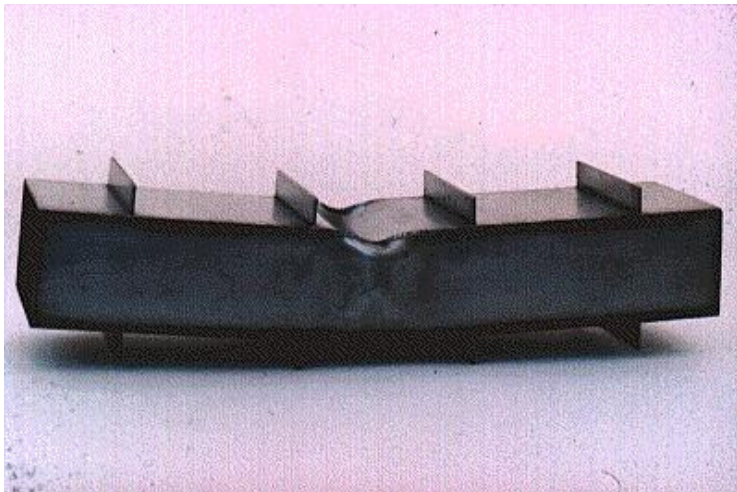
Flambement global par plissement

# Exemples de flambement



Flambement global par déversement

# Exemples de flambement



Flambement local par cloquage (effondrement) d'une poutre creuse

- 1 Généralités
- 2 Ansys
- 3 Modèles éléments finis en mécanique des solides
- 4 Dimensionnement mécanique
- 5 Modèles de résistance des matériaux
- 6 Génération de maillages
- 7 Problèmes non linéaires
- 8 Modèles de résistance des matériaux
- 9 Analyse modale
- 10 Flambement
- 11 Résolution par méthodes de puissance**

## Position du problème

Trouver les valeurs propres de la matrice carrée  $[A]$  de dimension  $N$ .

Trouver les  $N$  couples  $(\lambda_i, V_i)$  tels que

$$[A] \cdot V_i = \lambda_i \cdot V_i$$

Les  $V_i$  forment une base vectorielle, que l'on peut normer et classer par  $\lambda_i$  strictement croissants (les modes multiples sont traités différemment).

On peut donc écrire un vecteur  $X$  quelconque sous la forme

$$X = \sum_{i=1}^{i=N} (\alpha_i \cdot V_i)$$

Les  $\alpha_i$  sont des scalaires qui représentent les coordonnées du vecteur  $X$  dans la base  $(V_i)$ .

## Méthodes de puissance

Si l'on prend un vecteur quelconque écrit dans la base des vecteurs propres

$$X = \sum_{i=1}^{i=N} (\alpha_i \cdot V_i)$$

L'application de la matrice  $[A]$  à ce vecteur implique le résultat suivant

$$[A] \cdot X = [A] \cdot \left( \sum_{i=1}^{i=N} (\alpha_i \cdot V_i) \right) = \sum_{i=1}^{i=N} (\alpha_i \cdot [A] \cdot V_i) = \sum_{i=1}^{i=N} (\alpha_i \cdot \lambda_i \cdot V_i)$$

Si on applique  $m$  fois cette multiplication et que l'on prend en compte l'organisation croissante des  $\lambda_i$ , on obtient le résultat suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} [A]^m \cdot X = \sum_{i=1}^{i=N} (\alpha_i \cdot \lambda_i^m \cdot V_i) \\ = \lambda_N^m \cdot \sum_{i=1}^{i=N} \left( \alpha_i \cdot \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_N} \right)^m \cdot V_i \right) \\ \simeq \alpha_N \cdot \lambda_N^m \cdot V_N \end{array} \right.$$

On obtient ainsi une évaluation de la valeur propre  $V_N$ .

## Méthodes de puissance (suite)

On peut ensuite reprendre le même processus avec le vecteur

$$Y = X - (X \cdot V_N) \cdot V_N = X - \alpha_N \cdot V_N$$

L'application de la matrice  $[A]$  à ce vecteur donne

$$[A] \cdot Y = \sum_{i=1}^{i=N-1} (\alpha_i \cdot \lambda_i \cdot V_i)$$

Ainsi, en appliquant à nouveau  $m$  fois cette multiplication, on obtient

$$[A]^m \cdot Y \simeq \alpha_{N-1} \cdot \lambda_{N-1}^m \cdot V_{N-1}$$

On reproduit  $N$  fois ce processus de façon à identifier depuis  $V_N$  jusqu'à  $V_1$ .

## Méthodes de puissance inverse

On préfère généralement obtenir d'abord les plus petites valeurs propres (qui correspondent aux basses fréquences ou premiers modes critiques de flambement). Pour cela, on inverse la stratégie précédente

$$[A^{-1}] \cdot X = \sum_{i=1}^{i=N} \left( \alpha_i \cdot \frac{1}{\lambda_i} \cdot V_i \right)$$

Réitérer  $m$  fois l'application mène à

$$[A^{-1}]^m \cdot X \simeq \alpha_1 \cdot \frac{1}{\lambda_1^m} \cdot V_1$$

On peut ensuite remonter de  $V_1$  jusqu'à  $V_N$  par projections successives.