

Computational approach of systems design in engineering

Calcul Scientifique pour la Conception de Systèmes, Partie 2 (CSCS2)

D. Lemosse^{1,2}

¹Département de Mécanique, INSA Rouen Normandie

²Laboratoire de Mécanique de Normandie, EA 3828

Mai 2020

- 1 Modèles de résistance des matériaux
 - Elements de poutre
 - Modèles rhéologiques
- 2 Analyse modale
 - Equilibre dynamique
 - Modes propres
 - Exemples
- 3 Flambement
 - Modèles analytiques
 - Modélisation EF du flambement linéaire
 - Exemples de flambement
- 4 Résolution par méthodes de puissance

- 1 Modèles de résistance des matériaux
 - Elements de poutre
 - Modèles rhéologiques
- 2 Analyse modale
 - Equilibre dynamique
 - Modes propres
 - Exemples
- 3 Flambement
 - Modèles analytiques
 - Modélisation EF du flambement linéaire
 - Exemples de flambement
- 4 Résolution par méthodes de puissance

Eléments de poutre

Topologie 1D

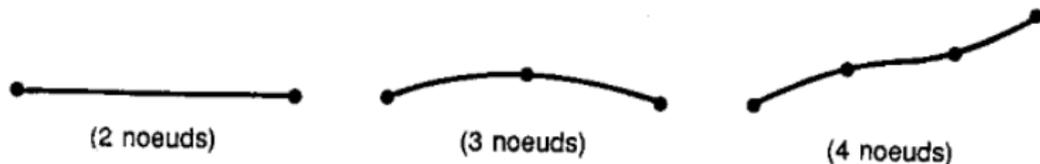
Cinématique déplacements (U, V, W), , rotations de flexion (θ_y, θ_z) et rotations de torsion (θ_x) aux noeuds.

Statique Torseur de cohésion aux noeuds ($N_x, T_y, T_z, Mt_x, Mf_y, Mf_z$).

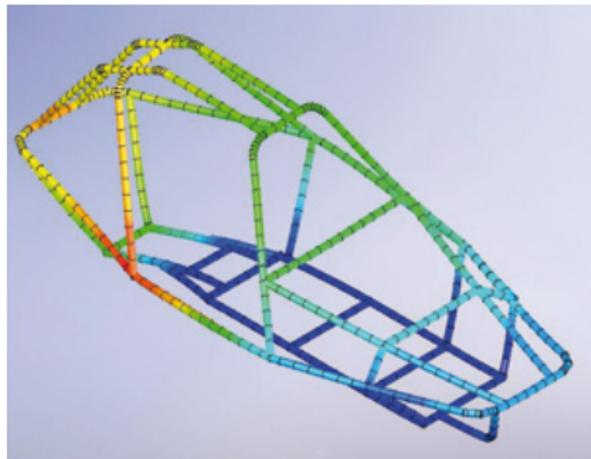
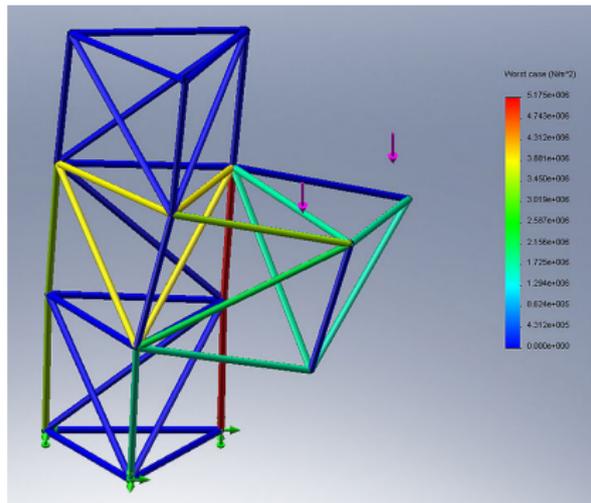
Propriétés physiques Sections (aires et moments quadratiques).

Matériau Relation de comportement et données matériaux.

Supports géométriques linéique.



Éléments de poutre - exemple



Modèles rhéologiques

Éléments utilisés classiquement et régulièrement.

Dont les spécifications sont rhéologiques (comportementales) avec des supports géométriques n'étant pas forcément définis.

Modèles rhéologiques

- Éléments ressorts
- Éléments rigides
- Éléments de masses

Eléments ressort

Topologie 0D (ponctuelle)

Cinématique déplacements (U, V, W), et rotations ($\theta_x, \theta_y, \theta_z$) aux noeuds.

Statique Torseur aux noeuds ($F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z$).

Propriétés physiques Raideurs axiales et raideurs de rotations.

Matériau -

Supports géométriques -

Topologie 1D (linéaire)

Cinématique Déplacements (u) aux noeuds.

Statique Force axiale (F_x) aux noeuds.

Propriétés physiques Raideur axiale.

Matériau -

Supports géométriques linéique à deux noeuds.

Eléments rigides

Topologie -

Cinématique Déplacements (U, V, W), et rotations ($\theta_x, \theta_y, \theta_z$) au noeud support (maître).

Statique Torseur statique au noeud support ($F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z$).

Propriétés physiques -

Matériau -

Supports géométriques un noeud support (maître) et autant d'autre noeuds que nécessaire (esclaves).

Eléments de masses

Topologie 0D

Cinématique déplacements (U, V, W), et rotations ($\theta_x, \theta_y, \theta_z$) au noeud.

Statique -

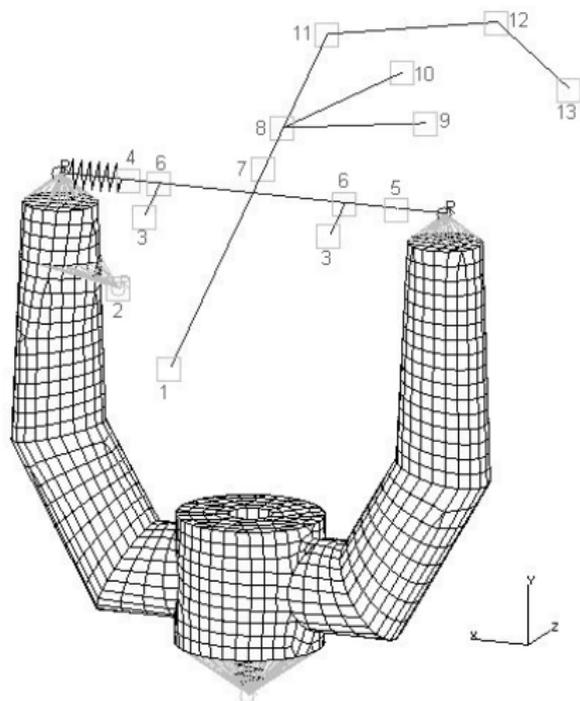
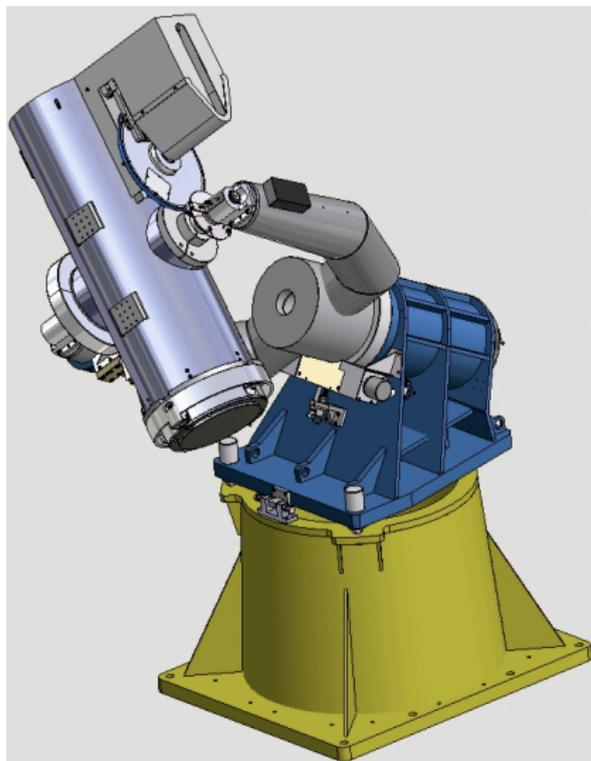
Propriétés physiques Masse et moments d'inerties.

Matériau -

Supports géométriques -

Modèles rhéologiques - exemples

Modélisation du télescope TAROT (CNRS - La Silla - Chili)



1 Modèles de résistance des matériaux

- Elements de poutre
- Modèles rhéologiques

2 Analyse modale

- Equilibre dynamique
- Modes propres
- Exemples

3 Flambement

- Modèles analytiques
- Modélisation EF du flambement linéaire
- Exemples de flambement

4 Résolution par méthodes de puissance

Equilibre dynamique

On se place dans le cadre de l'analyse linéaire.

hypothèse des petites perturbations (HPP)

- petits déplacements et petites déformations
- élasticité linéaire
- forces conservatrices

On a alors :

$$W_{int} + W_{ext} = W_{acc} \quad \text{avec} \quad W_{acc} = \delta U^T \cdot M \cdot \ddot{U}$$

La matrice de masse M vient de l'interpolation de $\ddot{U}(x, t) = \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2}$ sur le même espace que $U(x, t)$.

M est une matrice symétrique, définie et positive.

Matrice de masse de l'élément de barre

Si l'on prend l'exemple de l'élément linéaire de traction compression à deux noeuds, la partie dynamique est donnée par l'expression

$$W_{acc} = \int_{x=0}^{x=L} \delta u(x) \cdot \rho S \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} dx$$

avec

$$\ddot{u}(x, t) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) \cdot \ddot{u}_1(t) + \frac{x}{L} \cdot \ddot{u}_2(t)$$

aussi

$$W_{acc} = \langle \delta u_1 \quad \delta u_2 \rangle [M] \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix}$$

et

$$[M] = \frac{\rho S L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Modes propres

On cherche la solution homogène de cette équation différentielle ordinaire.

$$K \cdot U(t) + M \cdot \ddot{U}(t) = 0$$

La solution générale est recherchée sous forme harmonique : $U(t) = V \cdot e^{j\omega t}$

- V est le mode de vibration, la forme géométrique ;
- $f = \frac{\omega}{2\pi}$ est la fréquence de vibration.

On cherche à résoudre :

$$(K - \omega^2 \cdot M) \cdot V = 0 \quad \text{avec} \quad V \neq 0$$

On va donc obtenir (ω_i, V_i) , les fréquences (pulsations) et modes propres. On a N modes propres (éventuellement multiples), avec N la taille des matrices K et M .

On utilise fréquemment une procédure d'itérations inverses.

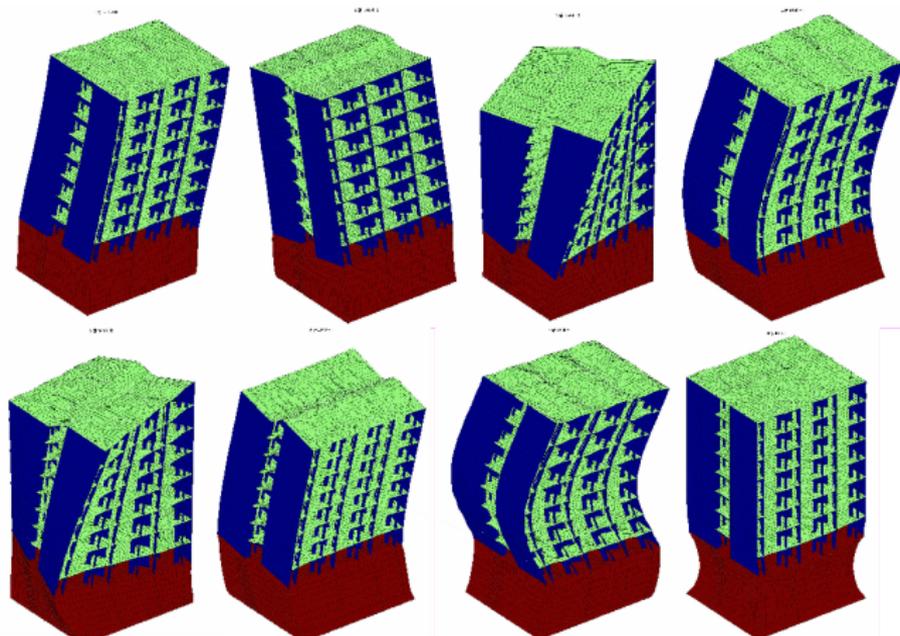
- méthode des puissances (depuis les hautes fréquences) ;
- méthode inverse (depuis les basses fréquences).

Les modes sont normés, donc sans amplitude. Les sollicitations extérieures induisent l'amplitude des vibrations.

Analyse modale des bâtiments

L'analyse modale des bâtiments peut avoir pour motivation

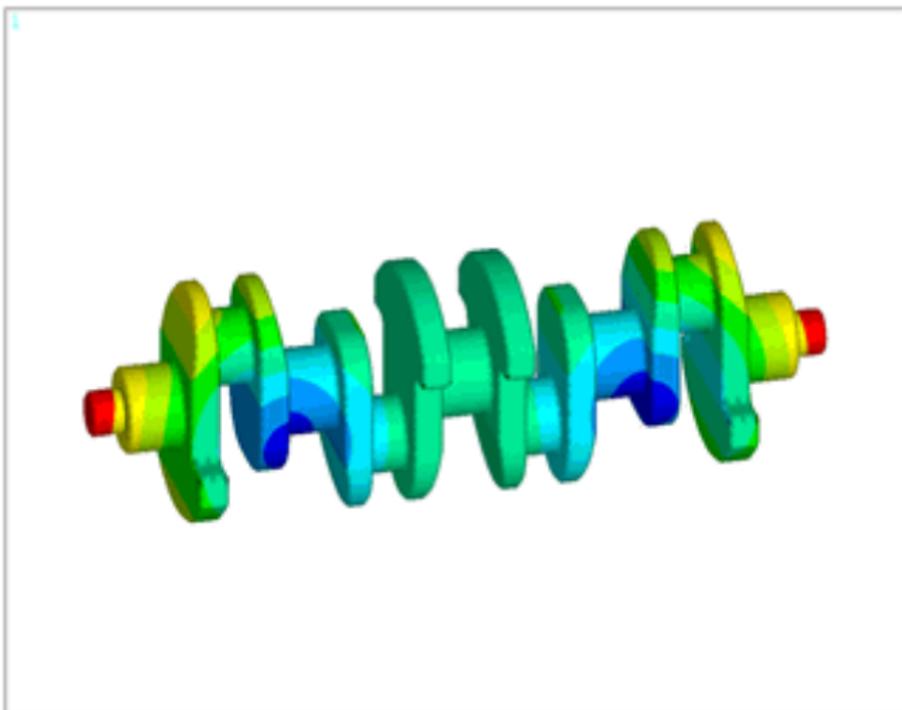
- l'évaluation de la réponse du bâtiment à une sollicitation sismique, vérification en dimensionnement critique (ELU)
- l'évaluation des vibrations du bâtiment soumis à une charge dynamique permanente (vent ou matériel mécanique), vérification en fonctionnement (ELS)



Analyse modale d'un vilebrequin

Obtenir les modes propres d'un vilebrequin peut avoir pour motivation

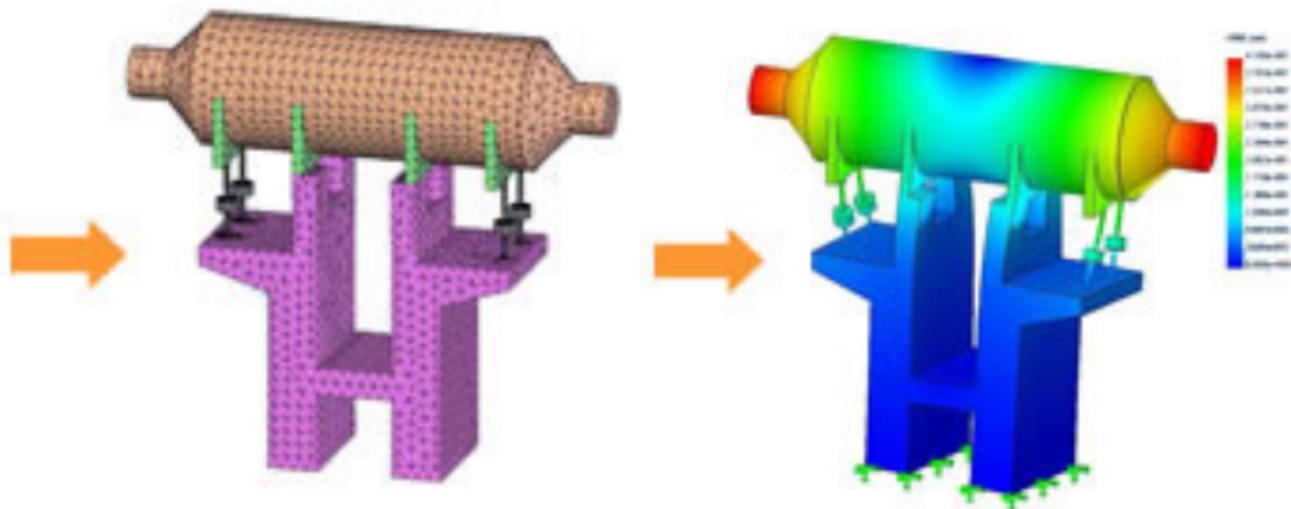
- évaluation des modes de vibration
- dimensionnement d'usage



Analyse modale d'une turbine

Chercher les modes propres d'une turbine permet :

- l'évaluation des modes de vibration en fonctionnement ;
- le dimensionnement d'usage ;
- les charges sur la plateforme.



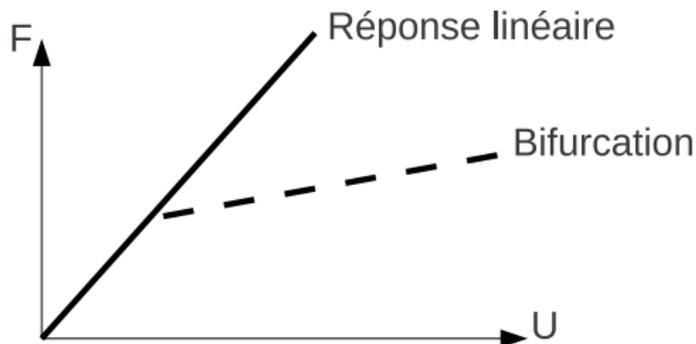
- 1 Modèles de résistance des matériaux
 - Elements de poutre
 - Modèles rhéologiques
- 2 Analyse modale
 - Equilibre dynamique
 - Modes propres
 - Exemples
- 3 Flambement**
 - Modèles analytiques**
 - Modélisation EF du flambement linéaire**
 - Exemples de flambement**
- 4 Résolution par méthodes de puissance

Bifurcation mécanique

Le flambement est un mode de déformation critique qui s'applique à des structures élancées soumises à de la compression. Il s'agit du passage brusque d'un état de compression à un état de flexion.

Cette déformation est due en majeure partie au phénomène de rotation du tenseur des contraintes lors de la déformation.

Le flambement est un mode de défaillance qui correspond à un état singulier de l'équilibre mécanique → plusieurs possibilités de réponses peuvent être suivies par la structure : bifurcation.



Flambement Rotule - Rotule

$$M_{fz} = -y(x) \cdot F$$

$$E \cdot I \cdot y''(x) = M_{fz}$$

$$y'' + \omega^2 \cdot y = 0 \quad \text{avec} \quad \omega^2 = \frac{F}{E \cdot I}$$

$$y(x) = A \cdot \cos(\omega \cdot x) + B \cdot \sin(\omega \cdot x)$$

$$y(0) = 0 \quad \text{implique} \quad A = 0$$

$$y(L) = 0 \quad \text{implique} \quad B \cdot \sin(\omega \cdot L) = 0$$

$$\omega \cdot L = k \cdot \pi$$

$$F = k^2 \cdot \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L^2}$$

Flambement Encastrée - Libre

$$M_{fz} = (y(L) - y(x)) \cdot F$$

$$y'' + \omega^2 \cdot y = \omega^2 \cdot y(L)$$

$$y(x) = A \cdot \cos(\omega \cdot x) + B \cdot \sin(\omega \cdot x) + \omega^2 \cdot y(L)$$

$$y(0) = 0 \quad \text{implique} \quad A = -\omega^2 \cdot y(L)$$

$$y'(0) = 0 \quad \text{implique} \quad B = 0$$

$$y(x) = \frac{F \cdot y(L)}{E \cdot I} (1 - \cos(\omega \cdot x))$$

$$\cos\left(\frac{L}{E^2 \cdot I^2} \cdot F^2\right) = 1 - \frac{E \cdot I}{F}$$

Matrice de raideur géométrique

La matrice des raideurs tangentes d'une structure traduit une linéarisation du comportement autour d'un point d'équilibre.

Cette matrice peut se décomposer sous la forme d'une somme de trois composantes :

Matrice de raideur tangente

$$K_{NL}(U) = K_L + K_G(U) + K_\sigma(U)$$

- K_L est la partie linéaire du comportement mécanique ;
- K_G est la partie associée aux grandes déformations ;
- K_σ traduit les grands déplacements.

C'est la modification de la matrice K_σ lors de la déformation qui produit le bifurcation.

Flambement linéaire

On s'intéresse généralement au flambement linéaire : transition depuis l'état linéaire à l'état non linéaire

En effet, après une déformation par flambement, il y a presque systématiquement défaillance de la structure.

Cette hypothèse permet ainsi d'affirmer qu'avant la bifurcation, le comportement est linéaire et vérifie

$$K \cdot U_0 = F_0$$

On cherche la transition de l'état linéaire à l'état non linéaire en augmentant l'effort de référence :

$$F_{ext} = \lambda \cdot F_0$$

λ est le facteur de charge.

Facteur de charge critique

Au moment du flambement, le système doit vérifier l'expression non linéaire de l'équilibre :

$$[K_{NL}(U)] \cdot U = F_{ext}$$

Mais comme on est à la limite de l'état linéaire, on vérifie aussi

$$U = \lambda \cdot U_0$$

Les grandes déformations sont négligées, aussi obtient-on le système :

$$[K_L] \cdot \lambda \cdot U_0 + [K_\sigma(\lambda \cdot U_0)] \cdot \lambda \cdot U_0 = \lambda \cdot F_0$$

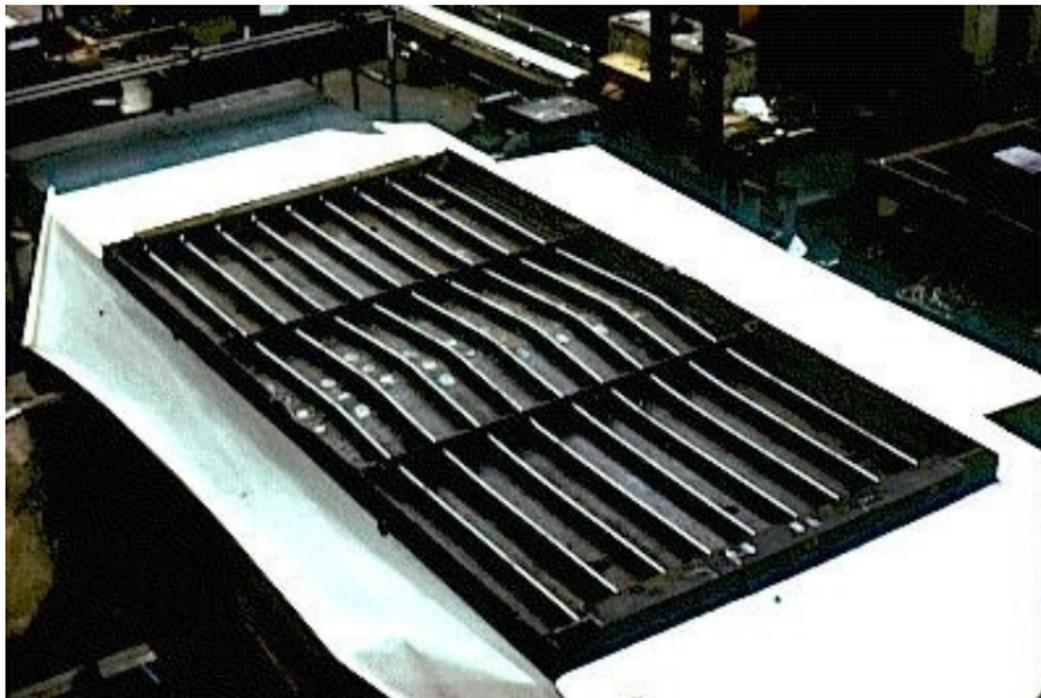
ce qui s'écrit encore

$$[K_L + \lambda \cdot K_\sigma(U_0)] \cdot U_0 = F_0$$

La notion de bifurcation se traduit mathématiquement par une matrice singulière. On cherche donc les valeurs critiques λ_c pour lesquelles on a

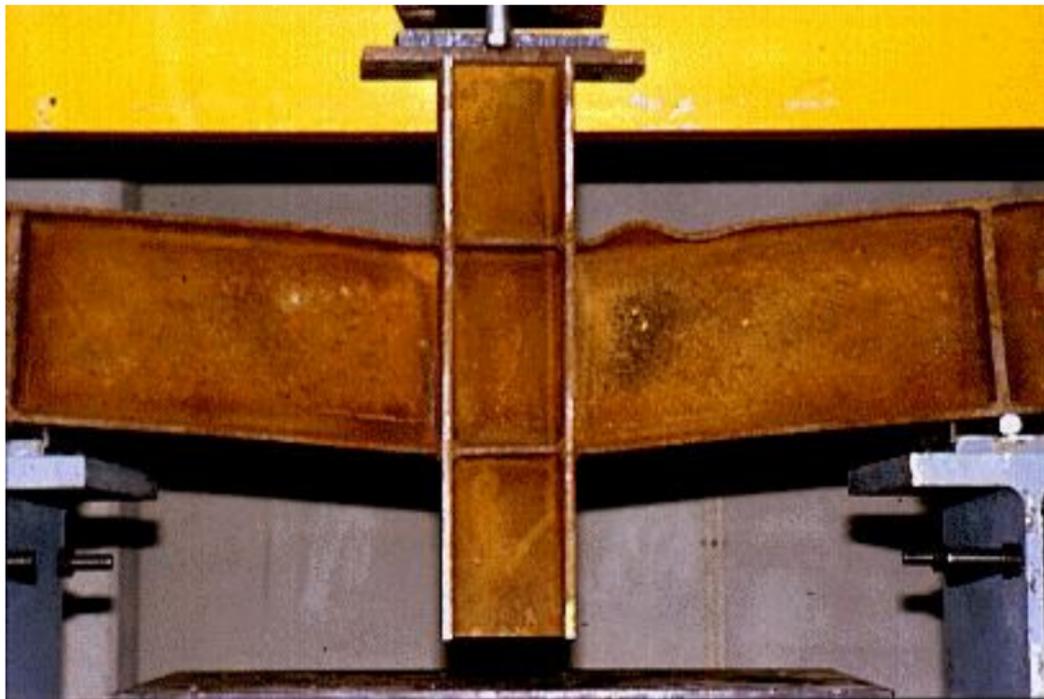
$$\det([K_L] + \lambda_c \cdot [K_\sigma(U_0)]) = 0$$

Exemples de flambement



Flambement global de poutres encastrées - encastrées

Exemples de flambement



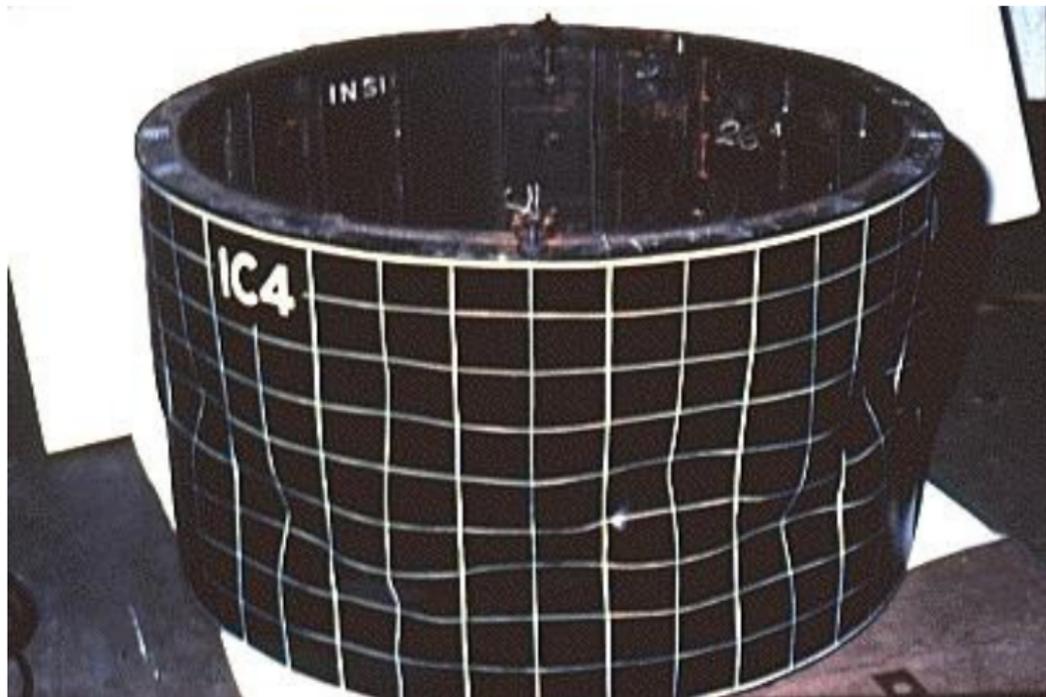
Flambement local du voile de la poutre

Exemples de flambement



Flambement global de l'ame de la poutre

Exemples de flambement



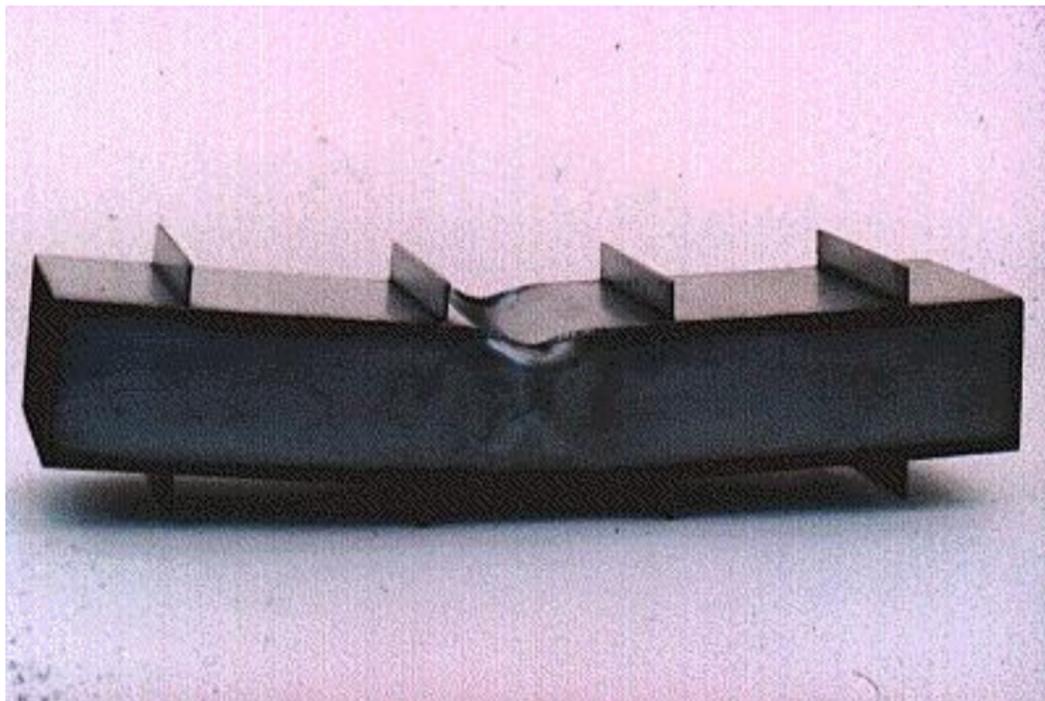
Flambement global par plissement

Exemples de flambement



Flambement global par déversement

Exemples de flambement



Flambement local par cloquage (effondrement) d'une poutre creuse

- 1 Modèles de résistance des matériaux
 - Elements de poutre
 - Modèles rhéologiques

- 2 Analyse modale
 - Equilibre dynamique
 - Modes propres
 - Exemples

- 3 Flambement
 - Modèles analytiques
 - Modélisation EF du flambement linéaire
 - Exemples de flambement

- 4 **Résolution par méthodes de puissance**

Position du problème

Trouver les valeurs propres de la matrice carrée $[A]$ de dimension N .

Trouver les N couples (λ_i, V_i) tels que

$$[A] \cdot V_i = \lambda_i \cdot V_i$$

Les V_i forment une base vectorielle, que l'on peut normer et classer par λ_i strictement croissants (les modes multiples sont traités différemment).

On peut donc écrire un vecteur X quelconque sous la forme

$$X = \sum_{i=1}^{i=N} (\alpha_i \cdot V_i)$$

Les α_i sont des scalaires qui représentent les coordonnées du vecteur X dans la base (V_i) .

Méthodes de puissance

Si l'on prend un vecteur quelconque écrit dans la base des vecteurs propres

$$X = \sum_{i=1}^{i=N} (\alpha_i \cdot V_i)$$

L'application de la matrice $[A]$ à ce vecteur implique le résultat suivant

$$[A] \cdot X = [A] \cdot \left(\sum_{i=1}^{i=N} (\alpha_i \cdot V_i) \right) = \sum_{i=1}^{i=N} (\alpha_i \cdot [A] \cdot V_i) = \sum_{i=1}^{i=N} (\alpha_i \cdot \lambda_i \cdot V_i)$$

Si on applique m fois cette multiplication et que l'on prend en compte l'organisation croissante des λ_i , on obtient le résultat suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} [A]^m \cdot X = \sum_{i=1}^{i=N} (\alpha_i \cdot \lambda_i^m \cdot V_i) \\ = \lambda_N^m \cdot \sum_{i=1}^{i=N} \left(\alpha_i \cdot \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_N} \right)^m \cdot V_i \right) \\ \simeq \alpha_N \cdot \lambda_N^m \cdot V_N \end{array} \right.$$

On obtient ainsi une évaluation de la valeur propre V_N .

Méthodes de puissance (suite)

On peut ensuite reprendre le même processus avec le vecteur

$$Y = X - (X \cdot V_N) \cdot V_N = X - \alpha_N \cdot V_N$$

L'application de la matrice $[A]$ à ce vecteur donne

$$[A] \cdot Y = \sum_{i=1}^{i=N-1} (\alpha_i \cdot \lambda_i \cdot V_i)$$

Ainsi, en appliquant à nouveau m fois cette multiplication, on obtient

$$[A]^m \cdot Y \simeq \alpha_{N-1} \cdot \lambda_{N-1}^m \cdot V_{N-1}$$

On reproduit N fois ce processus de façon à identifier depuis V_N jusqu'à V_1 .

Méthodes de puissance inverse

On préfère généralement obtenir d'abord les plus petites valeurs propres (qui correspondent aux basses fréquences ou premiers modes critiques de flambement). Pour cela, on inverse la stratégie précédente

$$[A^{-1}] \cdot X = \sum_{i=1}^{i=N} \left(\alpha_i \cdot \frac{1}{\lambda_i} \cdot V_i \right)$$

Réitérer m fois l'application mène à

$$[A^{-1}]^m \cdot X \simeq \alpha_1 \cdot \frac{1}{\lambda_1^m} \cdot V_1$$

On peut ensuite remonter de V_1 jusqu'à V_N par projections successives.