

# Computational approach of systems design in engineering

## Calcul Scientifique pour la Conception de Systèmes, Partie 2 (CSCS2)

D. Lemosse<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Département de Mécanique, INSA Rouen Normandie

<sup>2</sup>Laboratoire de Mécanique de Normandie, EA 3828

*Mai 2020*

- 1 Modèles de résistance des matériaux
  - Hypothèses mécaniques de plaques
  - Modélisation aux éléments finis de plaques
- 2 Génération de maillages
  - Maillage libre
  - Maillage structuré
  - Partition
  - Degré des éléments
  - Qualité géométrique des éléments
- 3 Problèmes non linéaires
  - Types de non linéarités
  - Comportement non linéaire géométrique
  - Résolution de systèmes non linéaires

- 1 Modèles de résistance des matériaux
  - Hypothèses mécaniques de plaques
  - Modélisation aux éléments finis de plaques
  
- 2 Génération de maillages
  - Maillage libre
  - Maillage structuré
  - Partition
  - Degré des éléments
  - Qualité géométrique des éléments
  
- 3 Problèmes non linéaires
  - Types de non linéarités
  - Comportement non linéaire géométrique
  - Résolution de systèmes non linéaires

## Résistance des matériaux

Obtenus à partir des équations de la résistance des matériaux, ces dernières dérivées des équations de la mmc à l'aide d'hypothèses cinétiques et cinématiques.

Les degrés de liberté sont les déplacements du support géométrique (ligne moyenne par exemple) et les rotations de la matière transverse (fibre ou section transverse), assemblés dans un torseur cinématique.

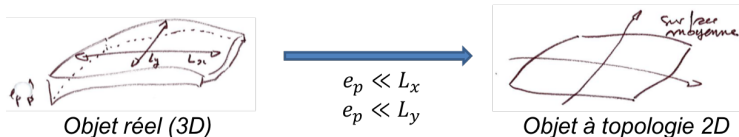
Les efforts sont traduits par le torseur de cohésion.

### Résistance des matériaux

- 2D - Éléments plaques et coques
- 1D - Éléments de poutres

## Géométrie des plaques

- Éléments structuraux minces suivants une direction.
- La géométrie est remplacée par un support à topologie surfacique → maillage surfacique topologie.



Rem : la surface moyenne est classiquement utilisée, mais il est quelque fois plus simple d'utiliser la surface inférieure ou supérieure (pour les composites multicouches par exemple).

Il existe deux modélisations :

- Plaque : la surface de description est plane et l'épaisseur est constante.
- Coque : la surface de description n'est pas plane et/ou l'épaisseur est variable.

## Comportement de la fibre épaisseur - plaque épaisse de Mindlin

### Fibre indéformable

Une fibre normale à la surface moyenne a une cinématique de solide rigide :

- Pas de raccourcissement ;
- Pas de flexion ;
- Pas de gauchissement.

Son mouvement est donc la superposition d'une translation et d'une rotation.

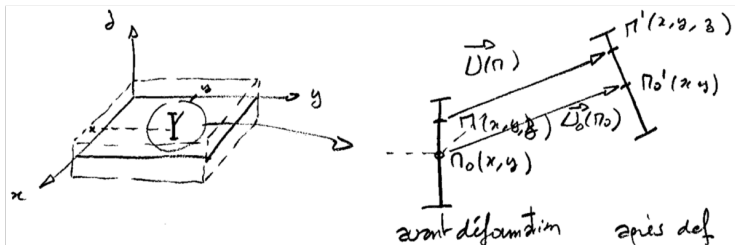
### Fibre normale - plaque mince de Kirchhoff

Dans le cas de plaque de très faible épaisseur ( $e_p \ll L/10$ ), le cisaillement transverse est négligeable. Cela a pour incidence qu'une fibre orthogonale à la surface moyenne avant déformation, le reste au cours de la transformation.

Cela conduit à :

- Une simplification du champ de contrainte car  $\tau_t = 0$ .
- On peut identifier les rotations de la fibre épaisseur avec les gradients du champ de déplacement transverse  $w(x, y)$ .

# Cinématique des plaques



Le champ de déplacements prend la forme

$$\vec{U}_M = \vec{U}_{M_0} + \vec{R} (M_0 \vec{M})$$

En introduisant les rotations  $\theta_x$  et  $\theta_y$  autour des axes  $x$  et  $y$ , et sous les hypothèses des petites perturbations, le champ cinématique s'écrit :

$$\vec{U}_M = \begin{pmatrix} u_0(x, y) + z \cdot \beta_x(x, y) \\ v_0(x, y) + z \cdot \beta_y(x, y) \\ w_0(x, y) \end{pmatrix}$$

## Eléments plaques et coques

Topologie 2D

Cinématique déplacements ( $U, V, W$ ), et rotations de flexion ( $\theta_x, \theta_y$ ) aux noeuds.

Statique Torseur de cohésion aux noeuds ( $N_x, N_y, T_{xy}, T_{xz}, T_{yz}, Mf_x, Mf_y$ ).

Propriétés physiques Epaisseurs.

Matériau Relation de comportement et données matériaux.

Supports géométriques triangle, quadrangle.



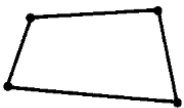
(3 noeuds)



(6 noeuds)



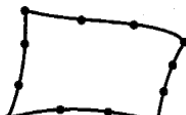
(9 noeuds)



(4 noeuds)



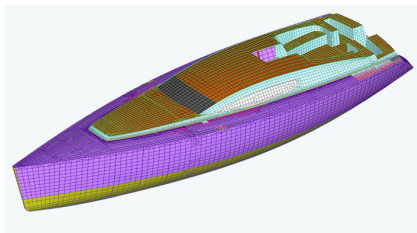
(8 noeuds)



(12 noeuds)



# Eléments plaques et coques - exemples



- 1 Modèles de résistance des matériaux
  - Hypothèses mécaniques de plaques
  - Modélisation aux éléments finis de plaques
  
- 2 Génération de maillages
  - Maillage libre
  - Maillage structuré
  - Partition
  - Degré des éléments
  - Qualité géométrique des éléments
  
- 3 Problèmes non linéaires
  - Types de non linéarités
  - Comportement non linéaire géométrique
  - Résolution de systèmes non linéaires

# Représentation d'un maillage

## Structure des données de maillage

Du point de vue de la structuration des données, un maillage est constitué d'une liste de coordonnées de noeuds (table des coordonnées) et de la liste des éléments décrit par une collection de noeuds (table des connectivités).

### Liste des noeuds

```
2411
1 1 1 11
7.8658D+01 -3.5735D+01 0.0000D+00
2 1 1 11
7.4658D+01 -3.5735D+01 0.0000D+00
...
```

### Liste des éléments

```
2412
180 115 1 1 7 8
213 214 240 239 369 370 396 395
181 115 1 1 7 8
214 215 241 240 370 371 397 396
...
```

Ces tables peuvent être générées manuellement (ou semi manuellement en utilisant des scripts) ou par construction géométrique (par exemple par extrusion).

# Les maillages libres

## Algorithmes de génération automatique

Des algorithmes génèrent de façon automatique une discrétisation de la géométrie. Le triangle et le tétraèdre sont les seules formes qui assurent la fermeture géométrique.

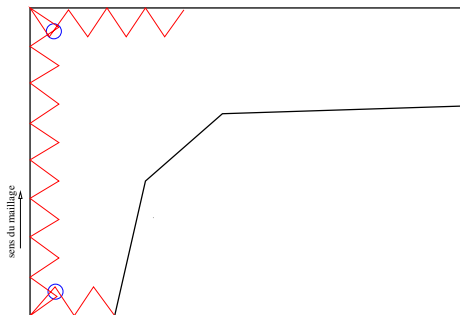
Il existe trois type de stratégies :

- frontale :  
on remplit l'espace géométrique depuis l'extérieur vers l'intérieur, cela produit des mailles déformées au centre.
- arbre :  
on génère des boites englobantes de la géométrie que l'on découpe successivement jusqu'à avoir une taille adéquate.
- Voronoï :  
on remplit l'espace intérieur d'un nuage de points que l'on associe ensuite avec des cellules de Voronoï. On génère ensuite une maille entre chaque noeuds contigus

Un lissage du maillage doit être réalisé, par une technique de triangulation de Delaunay ou par une relaxation élastique.

## Méthodes frontales

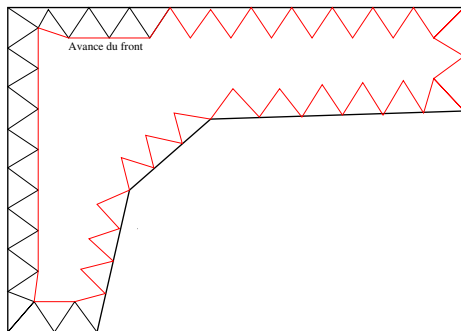
La méthode frontale consiste à mailler le domaine, de la façon la plus régulière possible en respectant une taille imposée par l'opérateur, depuis la frontière (ligne ou surface) vers l'intérieur jusqu'à remplissage complet du domaine.



L'algorithme adapte les tailles et fait disparaître les noeuds surnuméraires, mais n'est pas exempt de défaut en particulier sur la fin du processus.

## Méthodes frontales

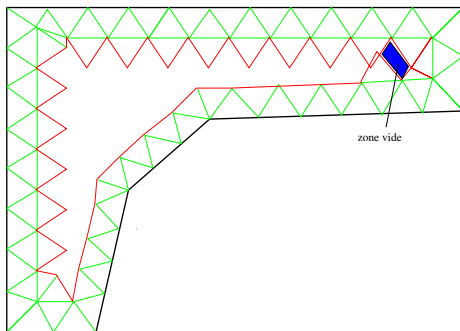
La méthode frontale consiste à mailler le domaine, de la façon la plus régulière possible en respectant une taille imposée par l'opérateur, depuis la frontière (ligne ou surface) vers l'intérieur jusqu'à remplissage complet du domaine.



L'algorithme adapte les tailles et fait disparaître les noeuds surnuméraires, mais n'est pas exempt de défaut en particulier sur la fin du processus.

## Méthodes frontales

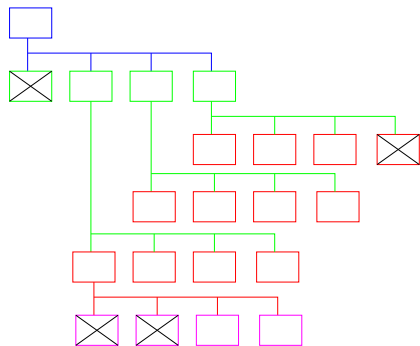
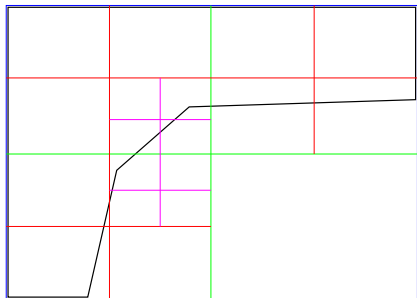
La méthode frontale consiste à mailler le domaine, de la façon la plus régulière possible en respectant une taille imposée par l'opérateur, depuis la frontière (ligne ou surface) vers l'intérieur jusqu'à remplissage complet du domaine.



L'algorithme adapte les tailles et fait disparaître les noeuds surnuméraires, mais n'est pas exempt de défaut en particulier sur la fin du processus.

# Arbre de construction

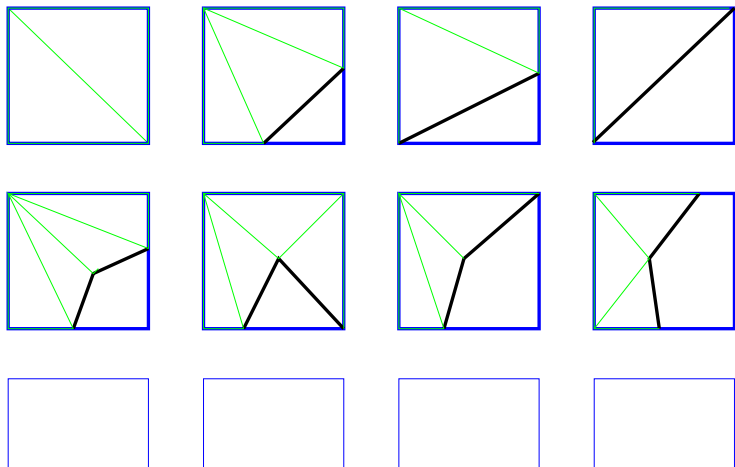
Le domaine est d'abord enfermé dans une boîte englobante. Cette boîte est découpée suffisamment de fois pour atteindre une taille imposée par l'opérateur et pour capter chaque point géométrique.





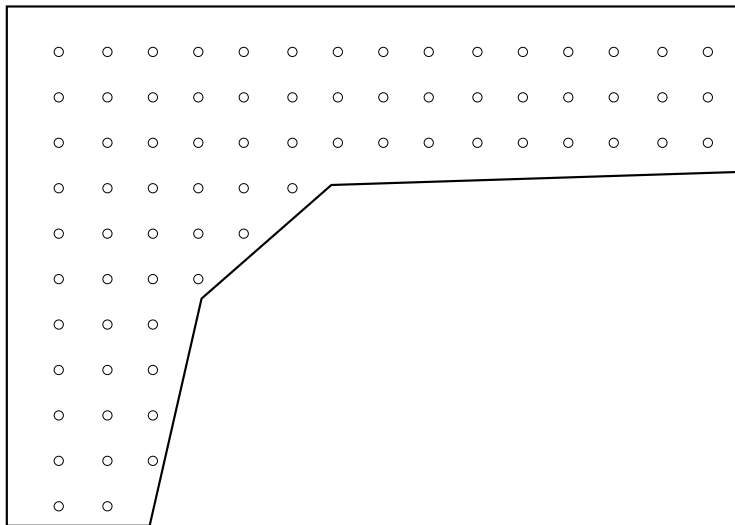
## Arbre de construction

Les boîtes sont ensuite maillées à l'aide de motifs prédéfinis. Ces motifs imposent de plus un niveau de découpage de façon à assurer les transitions entre domaines fins et grossiers.



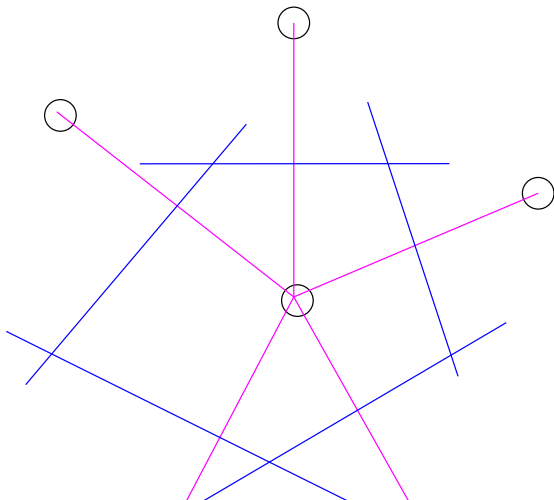
## Cellule de Voronoï

Le domaine est rempli d'un nuage de points disposés aléatoirement.



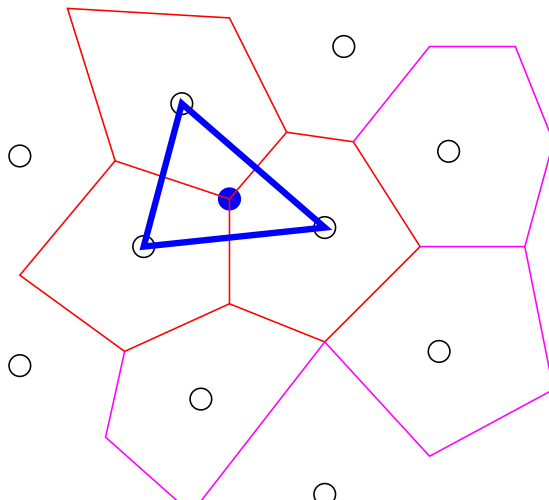
## Cellule de Voronoï

Des cellules de Voronoï sont construites autour de chaque point afin de définir le voisinage de chaque point.



## Cellule de Voronoï

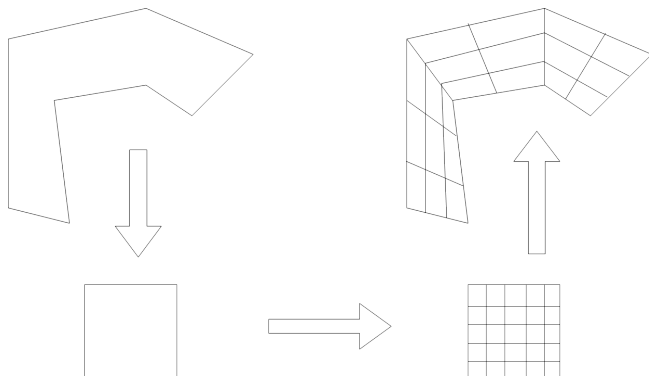
Un élément est alors construit entre les points des cellules de Voronoï formant trois voisinages concomitants.



## Projection transfini

On parle de maillage réglé ou transfini. Il consiste à associer une forme de référence facile à mailler à la forme réelle.

C'est la seule façon de réaliser des maillages hexaédrique et carré contrôlés.

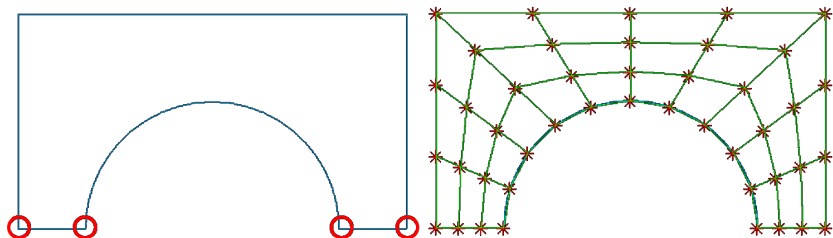


## Maillage régulier

Il faut faire attention à la manière d'associer les domaines réels aux domaines de référence.

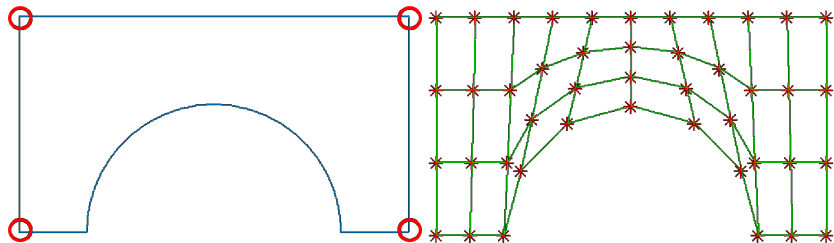
Certaines transformations induisent des déformations localisées importantes.

Sur l'exemple de l'arche, si l'on choisit les points inférieurs comme base de référence, le maillage subit une déformation d'ensemble, ce qui conduit à un maillage relativement régulier.



## Maillage déformé

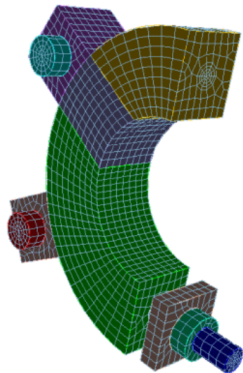
Si l'on choisit les points extrêmes, de façon à englober la pièce, cela induit une déformation localisée sur un côté du maillage. Certaines mailles n'assureront pas l'unicité de la transformation (i.e. des éléments avec des Jacobiens changeant de signe).



## Découpage des pièces

Les partitions sont des découpages virtuels qui permettent de décomposer la pièce à mailler complexe en une combinaison de pièces simples : en particulier pouvant être maillées de façon réglée.

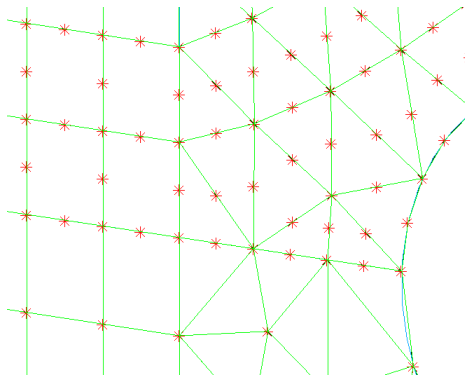
Les frontières sont de type ligne ou surface. Ces frontières assurent (imposent) la continuité des maillages.





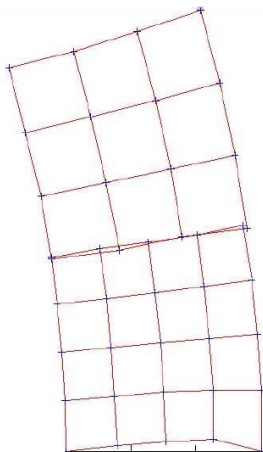
# Compatibilité des maillages

Il faut assurer la compatibilité des maillages.



## Maillages incompatibles

Il existe des stratégies de collage de maillages non compatibles, non actuellement utilisées de façon classique dans les codes industriels, mathématiquement simples mais délicates à mettre en oeuvre techniquement.



## Degré des éléments

Les éléments finis s'appuient sur des monômes de Pascal.

$$\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ x & y & & \\ x^2 & xy & y^2 & \\ x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 \\ \dots & & & \end{array}$$

Théoriquement les degrés sont infinis, mais dans la pratique seuls les degrés 1 et 2 sont utilisés, rarement degré 3.

# Eléments Serendip

## Serendipity

mot inventé en 1754 par le philosophe anglais Sir Horatio WALPOLE, qualifie la faculté à trouver la bonne information par hasard. Le mot provient du roman "The three princes of Serendib" à qui le hasard apportait la solution à des situations fâcheuses.

Les éléments à base carrée sont de type Serendip : on fait disparaître un noeud interne par rapport aux éléments de Hermite, ce qui implique une certaine forme de base polynomiale.

Les éléments de degrés supérieurs à 1 sont très sensibles aux déformations de maillages.

## Critères géométriques

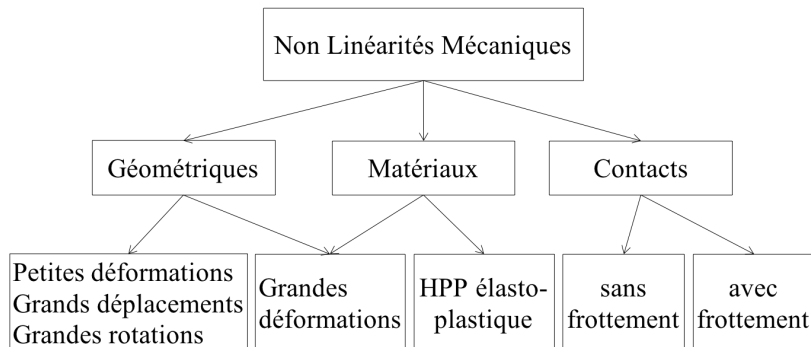
Il existe des critères géométriques afin d'évaluer la qualité des éléments du maillage réalisé. Ces critères quantifient l'écart entre la valeur théorique, basée sur un élément géométriquement parfait, et la valeur de l'élément du maillage.

Seuls les isomorphismes respectent cela : translation, rotation et allongements proportionnels.

Quality Check	Threshold
<input type="checkbox"/> Skew	>  90
<input type="checkbox"/> Warp	>  30
<input type="checkbox"/> Taper	>  0.5
<input type="checkbox"/> Aspect Ratio	>  10
<input type="checkbox"/> Distortion	<  0.7
<input type="checkbox"/> Stretch	<  0.3
<input type="checkbox"/> Jacobian	< 10
<input type="checkbox"/> Element Size	Both <input type="text" value="0.1"/> <input type="text" value="10"/>
<input type="checkbox"/> Use height for linear tri and quad	
<input type="checkbox"/> Quad Inc Angles	Both <input type="text" value="45"/> <input type="text" value="135"/>
<input type="checkbox"/> Tri Inc Angles	Both <input type="text" value="15"/> <input type="text" value="105"/>

- 1 Modèles de résistance des matériaux
  - Hypothèses mécaniques de plaques
  - Modélisation aux éléments finis de plaques
- 2 Génération de maillages
  - Maillage libre
  - Maillage structuré
  - Partition
  - Degré des éléments
  - Qualité géométrique des éléments
- 3 **Problèmes non linéaires**
  - **Types de non linéarités**
  - **Comportement non linéaire géométrique**
  - **Résolution de systèmes non linéaires**

# Problèmes non linéaires



# Problèmes non linéaires

## Non linéarités géométriques

- Les déplacements/rotations sont grands  $\rightarrow$  modification du domaine.
- Les déformations sont grandes  $\rightarrow$  conservation des termes du second ordre

## Non linéarités matériaux

- Comportements élastique non linéaire.
- Comportement plastiques.
- Matériaux hyper-élastiques.

## Non linéarités de contact

- Les déplacements/rotations sont « contrôlés »  $\rightarrow$  Modification des conditions aux limites.
- Les efforts de contact dépendent du problème  $\rightarrow$  Modification du second membre.



## Formulations et mesures suivant le type de non linéarité traitée

Type	Hypothèses	Formulation	Mesures
Matériau	hpp rdc non lin.	Material Non Linear Only	$\sigma$ $\epsilon$
Grands dép. Petites déf.	$[\nabla U]$ négl. rdc lin. ou non	Total Lagrange Update Lagrange	$\sigma$ et $\epsilon_A$ $S$ et $E$
Grands dép. Grandes déf.	hors hpp rdc lin. ou non	Total Lagrange Update Lagrange	$\sigma$ et $\epsilon_{log}$ $S$ et $E$

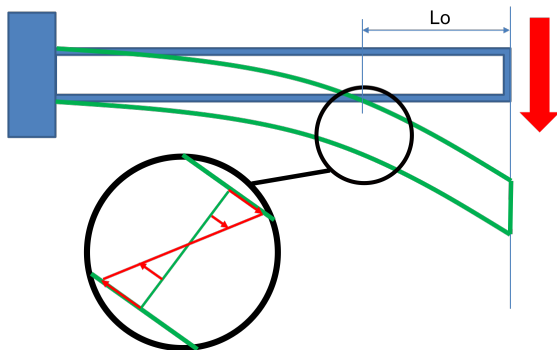
## Mesures de Contraintes :

- $\sigma$  Cauchy
- $S$  Piola-Kirchhoff

## Mesures de déformations

- $\epsilon$  linéarisée
- $\epsilon_A$  Almansi
- $E$  Green-Lagrange
- $\epsilon_{log}$  Hencky-Mises

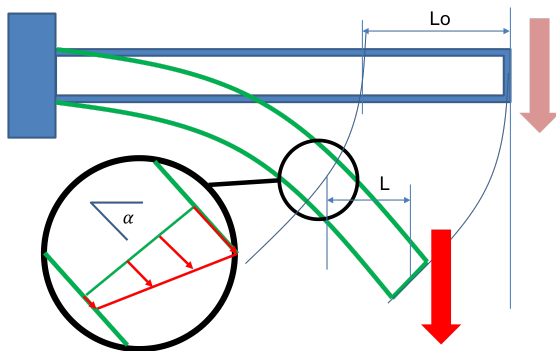
## Flexion d'une poutre, modélisation linéaire



- Contrainte de flexion :  $\sigma = y \cdot \frac{L_0 \cdot F}{I_{gz}}$
- Contrainte de cisaillement :  $\tau = \frac{F}{S}$

Contrainte équivalente de Von Mises :  $\sigma_{VM}^2 = \sigma^2 + 3 \cdot \tau^2$

# Flexion d'une poutre, modélisation non linéaire géométrique



- Contrainte de traction et flexion :  $\sigma = \frac{F \cdot \sin(\alpha)}{S} + y \cdot \frac{L \cdot F}{I_{gz}} \simeq \frac{F \cdot \sin(\alpha)}{S} + y \cdot \frac{L_0 \cdot F \cdot \cos(\alpha)}{I_{gz}}$
- Contrainte de cisaillement :  $\tau = \frac{F \cdot \cos(\alpha)}{S}$

# Non linéarité géométrique

## Particularité

- Les déplacements et les rotations sont grands.  $\rightarrow$  Modification du domaine.
- Les déformations sont grandes.  $\rightarrow$  Conservation des termes du second ordre.

L'équation d'équilibre du milieu continu

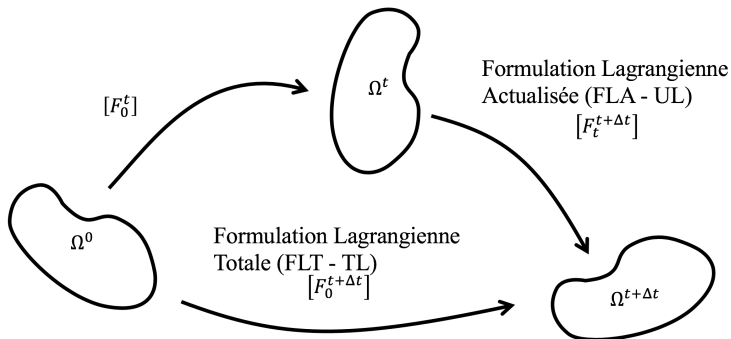
$$\operatorname{div}([\sigma]) + \vec{f}_V = \vec{0}$$

et affaiblie par une formulation variationnelle

$$-\int_{\Omega} \operatorname{tr}(\nabla \vec{U}^* \cdot \sigma) dV + \int_{\Omega} (\vec{U}^* \cdot \vec{f}_V) dV + \int_{\partial\Omega_F} (\vec{U}^* \cdot \vec{f}_S) dS = 0$$

On impose  $\vec{U} = \vec{U}_d$  et  $\vec{U}^* = \vec{0}$  sur  $\partial\Omega_U$  avec  $\nabla \vec{U}^* = \frac{\partial \vec{U}^*}{\partial x^{i+\Delta t}}$

## Cinématiques des solides déformables



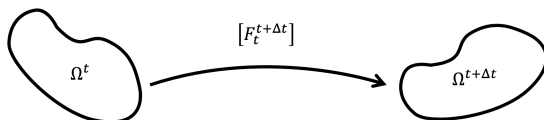
On a

$$\frac{\partial \mathbf{x}^{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{x}^0} = \frac{\partial \mathbf{x}^{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{x}^t} \frac{\partial \mathbf{x}^t}{\partial \mathbf{x}^0}$$

donc

$$[F_0^{t+\Delta t}] = [F_t^{t+\Delta t}] [F_0^t]$$

## Changement de référentiel



La relation de changement de référentiel

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^{t+\Delta t}} = \frac{\partial u^*}{\partial x^t} \frac{\partial x^t}{\partial x^{t+\Delta t}} = [F^*] \cdot [F_t^{t+\Delta t}]^{-1}$$

permet d'exprimer l'équilibre sur la configuration actuelle à partir d'un état précédent

$$W_{int} = - \int_{\Omega^{t+\Delta t}} \text{tr} \left( \nabla \vec{U}^* \cdot \sigma \right) dV = - \int_{\Omega^t} \text{tr} \left( E^* \cdot S_t^{t+\Delta t} \right) dV$$

On doit pour cela introduire la contrainte de Piola-Kirchhoff de seconde espèce  $S_t^{t+\Delta t}$  et le champ des déformations virtuelles

$$E^* = \frac{1}{2} \cdot \text{tr} \left( [F_t^{t+\Delta t}]^T \cdot [F^*] + [F^*]^T \cdot [F_t^{t+\Delta t}] \right)$$

# Forces extérieures

## Force conservative

- Indépendante de l'évolution du domaine.
- Vecteur force constant.

## Force suivieuse

- Modifié par l'évolution du domaine.
- Vecteur force variable.

## Mesures des contraintes

La mesure de contrainte doit être adaptées à l'étude traitée :

Cauchy	$\sigma^{t+\Delta t}$
Kirchhoff	$\tau_t^{t+\Delta t} = \sigma^{t+\Delta t} \cdot \det([F_t^{t+\Delta t}])$
Piola-Kirchhoff I	$T_t^{t+\Delta t} = [F_t^{t+\Delta t}]^{-1} \cdot \tau_t^{t+\Delta t}$
Piola-Kirchhoff II	$S_t^{t+\Delta t} = T_t^{t+\Delta t} \cdot [F_t^{t+\Delta t}]^{-T}$
Co-rotationnelle	$\sigma_R = [R_t^{t+\Delta t}]^T \cdot \sigma^{t+\Delta t} \cdot [R_t^{t+\Delta t}]$



## Mesures des déformations

On cherche des lois de comportement objectives permettant de décrire le matériau :

$$\sigma^{t+\Delta t} = H(\epsilon^{t+\Delta t})$$

ou

$$S^{t+\Delta t} = H(E_t^{t+\Delta t})$$

Ces lois nécessitent l'introduction de mesures de déformations adaptées :  
Déformation ingénieur

$$\epsilon^{t+\Delta t}$$

Green-Lagrange

$$E_t^{t+\Delta t} = \frac{1}{2} \text{tr} \left( [F_t^{t+\Delta t}]^T \cdot [F_t^{t+\Delta t}] - [I] \right)$$

## Formulation éléments finis

On écrit l'équilibre sur une configuration  $\Omega^t$  connue

$$W_{int} = - \int_{\Omega^t} tr \left( E^* \cdot S_t^{t+\Delta t} \right) dV = - \langle U^* \rangle \cdot \{R\}$$

On doit alors exprimer le tenseur des déformations de Green-Lagrange

$$\{E_t^{t+\Delta t}\} = \left( [B_L] + [B_{NL} \{U_t^{t+\Delta t}\}] \right) \cdot \{U_t^{t+\Delta t}\}$$

et le tenseur des déformations virtuelles

$$\{E^*\} = \left\{ \delta E_t^{t+\Delta t} \right\} = \left( [B_L^*] + [B_{NL}^* \{U_t^{t+\Delta t}\}] \right) \cdot \{U^*\}$$

Ce qui donne

$$\{R\} = \int_{\Omega^t} ([B_L^*] + [B_{NL}^*])^T \cdot [H] \cdot ([B_L] + [B_{NL}]) \cdot \{U_t^{t+\Delta t}\} dV$$

## Résolution non linéaire

On construit un processus itératif  $\{U^i\}$  dont la limite  $\{U^\infty\}$  correspond au champ de déplacement  $\{U_t^{t+\Delta t}\}$ .

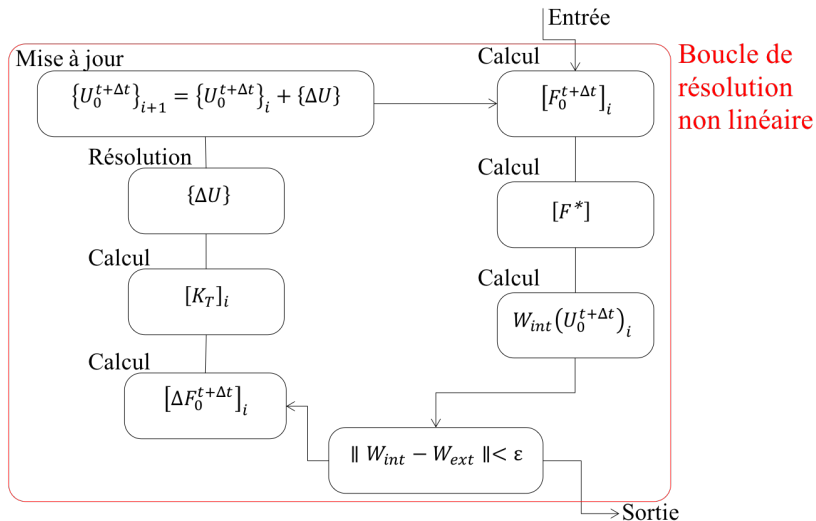
Un développement au premier ordre nous permet d'écrire :

$$R(U^{i+1}) = R(U^i + \Delta U) \simeq R(U^i) + \frac{\partial R(U^i)}{\partial U} \cdot \Delta U$$

On réalise les opérations suivantes

- 1 Calcul du résidu  $\{R\} = \{R(U^i)\}$ .
- 2 Test : si  $\|R\| < \epsilon_{rr}$ , fin du processus.
- 3 Calcul de la matrice tangente  $[K_T] = \frac{\partial R(U^i)}{\partial U}$ .
- 4 Résolution du système linéaire  $[K_T] \cdot \{\Delta U\} = -\{R\}$ .
- 5 Mise à jour  $\{U^{i+1}\} = \{U^i\} + \{\Delta U\}$ .
- 6 Retour en 1.

## Formulation Lagrangienne Totale



# Formulation Lagrangienne Actualisée

