Chapitre 1

Exercices *

1.1 Probabilités

1. Une urne contient 6 boules rouges, 4 blanches et 5 vertes.

   (a) On tire une boule de l'urne. Calculer les probabilités suivantes : elle est rouge, elle est blanche, elle est verte, elle n'est pas rouge, elle est rouge ou blanche.

   (b) On tire une seconde boule après remise de la première. Quelle est la probabilité d'avoir tiré 1 boule blanche et 1 boule rouge? Deux boules rouges?

2. Une compagnie d'assurance répartit ses clients en trois catégories : les personnes à "bas risque" (B, 20 %), à "moyen risque" (M, 50 %) et à "haut risque" (H, 30 %). Les statistiques indiquent que les probabilités conditionnelles pour qu'un assuré soit impliqué dans un accident A au cours d'une année sont respectivement $P(A|B) = 0.05$, $P(A|M) = 0.15$ et $P(A|H) = 0.3$.

   (a) Calculer la probabilité pour qu'un assuré pris au hasard ait un accident au cours de l'année.

   (b) Sachant qu'un assuré a eu un accident, calculer les probabilités pour qu'il appartienne à chacune des classes B, M et H.

3. La durée de vie en heures d'un composant électronique est une variable aléatoire X de densité de probabilité

$$f(x) = \begin{cases} \alpha^2 x e^{-\alpha x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   avec $\alpha > 0$.

   (a) Vérifiez que f est bien une densité de probabilité.

   (b) Calculer l'espérance mathématique μ et la variance σ^2 de X. Que représentent ces grandeurs?

   (c) Calculer la probabilité p qu'un composant pris au hasard ait une durée de vie supérieure ou égale à μ.

   Rappel : $\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x} dx = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$.

4. Trouver les constantes a en fonction des bornes sur X pour que les fonctions suivantes soient des densités de probabilité. Donner ensuite les expressions de l'espérance mathématique et de la variance (si elles existent) des v.a. correspondantes :

   (a)

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{si } 0 < x < b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

* tirés du recueil réalisé par G. Govaert et T. Denoeux

(b)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x^2} & \text{si } x \geq b \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Tracer les fonctions de densité et les fonctions de répartion correspondantes.

5. Calculer l'espérance mathématique et la variance des v.a. discrètes suivant respectivement :
   (a) une loi uniforme discrète $\mathcal{U}(n)$
   (b) une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ (on calculera $E(X(X-1))$).

   Rappels :
$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

6. Soit une variable aléatoire réelle de densité de probabilité $f(x) = \frac{1}{\sqrt{18\pi}} \exp(-\frac{x^2-10x+25}{18})$.
   (a) Cette densité correspond-elle à une distribution normale ? Si oui, déterminer son espérance et sa variance.
   (b) Pour quelle valeur de x cette densité de probabilité atteint-elle son maximum ?

7. Soit X une v.a. suivant une loi normale de paramètres μ et σ^2 et $Y = \alpha X + \beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que Y suit une loi normale dont on précisera les paramètres.
   (b) En déduire les valeurs de α et β telles que Y suive une loi normale centrée réduite.

8. Soit X une variable aléatoire normale de paramètres μ et σ^2.
   (a) Déterminer, en fonction de Φ, fonction de répartition de la loi normale centrée-réduite, la probabilité pour que X se trouve dans l'intervalle $]\mu - k\sigma, \mu + k\sigma[$.
   (b) Calculer les valeurs numériques correspondant à $k = 1, 2, 3$ et 4.

$\mathcal{N}(200, 9)$

9. Une usine fabrique des crayons dont la longueur en millimètres suit une loi de Gauss $\mathcal{N}(\in'', \exists)$. Quel est le pourcentage moyen de crayons dont la longueur est comprise entre 201 et 203 mm ? Donner un intervalle centré sur 200 dans lequel se trouve avec une probabilité 0.9 la longueur d'un crayon pris au hasard.

10. On suppose que 10 ouvriers ont besoin de manière intermittente de machines électriques et on est intéressé par l'évaluation de la puissance totale nécessaire pour le bon fonctionnement de l'atelier. Pour une approximation grossière, on peut considérer que chaque ouvrier a la même probabilité d'utiliser une machine électrique, qu'ils travaillent de manière indépendante et que la puissance consommée par chaque machine est de K kilowatts. En calculant la probabilité pour que k ouvriers ou plus utilisent en même temps une machine, proposer une puissance (en fonction de K) totale raisonnable pour le bon fonctionnement de cet atelier. (on supposera qu'un ouvrier utilise en moyenne une machine 12 minutes par heure).

1.2 Échantillons – Vraisemblance

1. On effectue un tirage avec remise de n individus dans une population formée de 2 catégories A et B en proportions respectives p et $1-p$. Soit F la statistique mesurant le pourcentage de la catégorie A dans l'échantillon. Calculer l'espérance et la variance de F. Montrer que F converge vers une loi normale dont on précisera les paramètres lorsque la taille de l'échantillon devient grande. (On utilisera les propriétés de la moyenne empirique d'un échantillon).

2. On dispose de la réalisation $x_1, \ldots, x_n$ d'un échantillon $X_1, \ldots, X_n$ dont la variable parente suit une loi uniforme sur $[0, a]$. Déterminer la forme de la fonction de vraisemblance du paramètre a. La représenter graphiquement.

3. Soient X et Y deux variables aléatoires i.i.d., suivant une loi de Poisson de paramètre λ :

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \quad \forall x \in \mathbb{N}$$

   (a) En supposant $\lambda = 2$, quelle est la probabilité d'observer l'événement suivant :

$$(X = 1, Y = 3)$$

   (b) Que devient la probabilité d'observer ce même événement si l'on suppose maintenant $\lambda = 10$?

   (c) Laquelle de ces deux valeurs de λ vous semble-t-elle la plus plausible (vraisemblable) ayant observé les réalisations $x = 1$ et $y = 3$?

4. Les cerises Momenrency du sud ouest de la France ont un poids suivant une distribution normale centrée sur $\mu = 5{,}02$ g et de variance $\sigma^2 = 0{,}3$ g. Trouvez la probabilité pour qu'un échantillon de 100 cerises prises au hasard ait un poids total :

   (a) compris entre 496 et 500 grammes?

   (b) strictement supérieur à 510 grammes?

   Si on tire au hasard deux lots de 1000 cerises chacun, quelle est la probabilité que leur poids diffère de plus de 5 grammes?

5. Le jeu de «pile ou face»

   (a) Un joueur effectue 100 jets d'une pièce de monnaie parfaitement équilibrée. Trouvez la probabilité qu'il y ait 60 faces ou plus.

   (b) Le gérant du casino considère maintenant chacun des 500 joueurs présents dans son établissement. Chaque joueur, là encore, jette 100 fois une pièce de monnaie toujours parfaitement équilibrée. Quelle est la probabilité pour que 10 joueurs ou plus obtiennent 60 faces ou plus.

6. On cherche à comparer les ampoules de type A et celles de type B dont la durée de vie suit une loi normale avec les paramètres suivants :

Marque	μ	σ
A	1400 h	200h
B	1200 h	100h

   On prélève 125 ampoules de chaque type. Calculez la probabilité des événements suivants :

   (a) la durée de vie moyenne des ampoules de type A est supérieur de plus de 160 heures à celle des ampoules du type B ;

   (b) la durée de vie moyenne des ampoules de type B est supérieur ou égale à à celle des ampoules du type A.

1.3 Caractéristiques des estimateurs

1. Soit μ l'espérance d'une variable aléatoire X.
   (a) Montrer que $\overline{X}$ est un estimateur convergent de μ.
   (b) On se propose d'estimer la variance de X. Rappeler l'expression de la variance σ^2 de X et en déduire un estimateur de σ^2 dans le cas où μ est connue et dans le cas où μ est inconnue.
   (c) Calculer l'espérance de ces estimateurs et proposer des estimateurs sans biais si nécessaire.
2. On dispose d'un échantillon de n variables aléatoires indépendantes issues d'une loi uniforme définie sur l'intervalle $[0, a]$ et on se propose d'estimer le paramètre a. Pour cela, on étudie les propriétés des 2 estimateurs $\hat{a}_1 = 2\overline{X}$ et $\hat{a}_2 = \max(X_i)$.
   (a) Calculer l'espérance et la variance de $\hat{a}_1$.
   (b) Même chose pour $\hat{a}_2$. (Indication : calculer d'abord la fonction de répartition de $\hat{a}_2$).
   (c) Après comparaison de ces estimateurs dites celui qui vous semble être le meilleur et proposer un estimateur $\hat{a}_3$ préférable aux deux estimateurs précédents.
   (d) Existe-t-il un estimateur efficace de a?
   (e) Calculer la précision des estimateurs $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$ et $\hat{a}_3$.
   (f) Déterminer une expression simple de la fonction de vraisemblance $a \to L(x_1, \ldots, x_n, a)$. En déduire une statistique exhaustive de a.
   (g) Donner l'estimateur du maximum de vraisemblance de a.
3. On dispose d'un échantillon de n variables aléatoires indépendantes tiré d'une loi de Laplace de densité
$$f(x) = \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha|x|} \ \forall x \in \mathbb{R} \text{ et } \alpha > 0.$$
   (a) Existe-t-il un estimateur efficace de α?
   (b) Sinon, d'une fonction $u(\alpha)$ de α?
   (c) Calculer la variance de $\widehat{u(\alpha)}$ de 3 façons différentes.
4. Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon d'une loi normale de moyenne θ et de variance $\theta(1-\theta)$, où $\theta \in]0, 1[$ est un paramètre inconnu. On considère les estimateurs de θ :
$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X} \\ T_2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \end{aligned}$$
   (a) Montrer que T_1 et T_2 sont sans biais et convergents.
   (b) Quel estimateur a-t-on intérêt à choisir?

   N.B. : On donne $\mathrm{Var}(X_i^2) = 2\theta^2(1-\theta^2)$.
5. Soit X une v.a. réelle de densité :
$$f(x; \theta) = \frac{1+\theta}{(x+\theta)^2} 1_{[1,+\infty[}(x)$$
   où θ est un paramètre de $]-1, +\infty[$.

   Soit un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de X. Trouver la borne de Cramer-Rao pour les estimateurs sans biais de θ.

1.4 Estimation ponctuelle

1. Soit une variable aléatoire gaussienne $\mathcal{N}(\mu, \sigma^{\in})$.

   (a) En supposant μ connue, donner l'estimateur efficace de σ^2 et sa variance.

   (b) En supposant μ et σ^2 inconnues, donner leurs estimateurs par la méthode du maximum de vraisemblance.

2. Un fabricant de tissu essaie une nouvelle machine. Il fabrique des coupons de 10 cm et compte le nombre de défauts par coupon. Ayant examiné 126 coupons, il a observé la répartition suivante du nombre de défauts :

Nombre de défauts k	0	1	2	3	4
Nombre de coupons n_k	44	49	24	7	2

   (a) Calculer les valeurs prises par $\overline{X}$ et S^{*2} pour cet échantillon.

   (b) En supposant que le nombre de défauts par coupon obéit à une loi de Poisson de paramètre λ, trouver l'estimateur du maximum de vraisemblance de λ. Est-il efficace?

   (c) Donner un estimateur par la méthode des moments du paramètre λ d'une loi de Poisson. Cette méthode donne-t-elle un résultat unique? Si non, donner un autre estimateur de λ par la méthode des moments.

3. On désire connaître la proportion p des écoles maternelles possédant au moins un magnétoscope. Pour cela, on enquête sur 100 écoles prises au hasard et on en compte 25 possédant au moins un magnétoscope.

   (a) Modélisation par une loi de Bernoulli : on peut considérer que les informations disponibles correspondent à un échantillon de taille 100 d'une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p.

      i. Trouver un estimateur de p par la méthode des moments.

      ii. Donner l'estimateur de p par la méthode du maximum de vraisemblance ; est-il efficace ?

   (b) Modélisation par une loi binomiale: on peut aussi considérer que les informations disponibles correspondent à un échantillon de taille 1 d'une variable aléatoire binomiale de paramètre n et p.

      i. Trouver un estimateur de p par la méthode des moments.

      ii. Donner l'estimateur de p par la méthode du maximum de vraisemblance ; est-il efficace?

      iii. Comparer aux résultats de la question précédente.

4. Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = pf_a(x) + (1-p)f_b(x)$$

   où p est un paramètre inconnu à déterminer et $f_a(x)$ et $f_b(x)$ les densités de deux lois uniformes respectivement sur $[0, a]$ et $[0, b]$, a et b étant deux paramètres connus tels que $a < b$. On dispose d'un échantillon i.i.d. $X_1, \ldots, X_n$ de la v.a. X.

   (a) Montrez que la vraisemblance du paramètre p est égale à :

$$L(x_1, \ldots, x_n; p) = \left(\frac{p}{a} + \frac{1-p}{b}\right)^y \left(\frac{1-p}{b}\right)^{n-y}$$

   où y est le nombre d'observations $\leq a$.

   (b) En déduire l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{p}_{MV}$ de p.

   (c) Cet estimateur est-il efficace? Donner sa variance.

(d) Calculer l'espérance de la variable aléatoire X. En déduire l'estimateur $\hat{p}_m$ de p par la méthode des moments.

(e) Comparer, sans la calculer, la variance de $\hat{p}_m$ avec celle de $\hat{p}_{MV}$.

(f) Application numérique. On a obtenu la réalisation suivante d'un échantillon de taille $n = 13$:

1	2	2	5	13	4	3	8	11	5	6	3	1

En supposant $a = 5$ et $b = 13$, donner les estimations $\hat{p}_{MV}$ et $\hat{p}_m$.

1.5 Estimation par intervalle de confiance

1. Pour étudier la teneur en fer de 400kg de minerai, on a prélevé au hasard un échantillon de 20 prises de 1.6kg sur lesquelles on a mesuré la teneur en fer. $\overline{X}$ et S^* prennent les valeurs 0.2486 et 0.0028. On suppose, en outre, que la teneur d'une prise de 1.6 kg suit une loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ.

   (a) Déterminer l'intervalle de confiance bilatéral sur μ à 99%.

   (b) Quelle est la taille minimale de l'échantillon qu'il faut prendre pour approcher μ à 0.001 près dans un intervalle à 95%?

   (c) Donner un intervalle de confiance inférieur ($[0, a]$) au niveau 0.99 pour la variance σ^2 à partir des mesures effectuées.

2. On reprend le problème d'estimation de la proportion p des écoles maternelles possédant au moins un magnétoscope (rappel : sur 100 écoles prises au hasard, 25 possédant au moins un magnétoscope). On utilisera la modélisation par une variable ~~binomiale~~ Bernoulli.

   (a) Donner un intervalle de confiance bilatéral à 95% pour p.

   (b) Quelle doit être la taille minimum de l'échantillon pour connaître p à ϵ près avec un niveau de confiance $1-\alpha$? Application numérique : $\epsilon = 0.01$ et $1-\alpha = 0.9$.

3. Une variable aléatoire suit une loi de Poisson de paramètre λ. Dix réalisations indépendantes de cette variable fournissent les résultats suivants :

$$8, 9, 22, 10, 3, 6, 20, 5, 11, 6.$$

   Donner un intervalle de confiance bilatéral symétrique au niveau 0.90 pour le paramètre λ.

4. Soit une variable aléatoire obéissant à la loi

$$f(x) = \frac{\lambda^3}{2} x^2 e^{-\lambda x}$$

   avec $x, \lambda > 0$. On considère un échantillon de n variables aléatoires indépendantes tirées de cette loi et que l'on note $X_1, \ldots, X_n$.

   (a) Donner l'estimateur du maximum de vraisemblance de λ.

   (b) Existe-t-il un estimateur efficace de λ ou d'une fonction de λ? Si oui, donner sa variance et en déduire l'espérance μ et la variance σ^2 de X.

   (c) On reprend l'estimateur de la question (a) et on considère n très grand. Donner un intervalle de confiance bilatéral sur λ au niveau de confiance $1-\alpha$.

   (d) On reprend l'estimateur de la question (b) et on considère toujours n très grand. Donner un intervalle de confiance bilatéral sur λ au niveau de confiance $1-\alpha$ et le comparer au résultat de la question précédente.

   (e) Donner l'estimateur du maximum de vraisemblance de la variance de X.

5. Soit une variable aléatoire obéissant à une loi exponentielle $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ avec $x, \lambda > 0$.

   (a) Donner, s'il en existe, un estimateur efficace de λ ou d'une fonction de λ.

   (b) À l'aide de l'estimateur précédemment trouvé et en supposant que la taille de l'échantillon est grande, proposer un intervalle de confiance bilatéral pour λ au niveau $1-\alpha$.

6. Un échantillon de taille 9 est mesuré sur une population gaussienne d'espérance mathématique μ inconnue et d'écart-type σ supposé connu et égal à 2.

   (a) Donner une borne supérieure au niveau $1-\alpha$ sur μ ($\alpha = 0.9$).

   (b) Quelle taille d'échantillon faut-il pour approcher μ à 0.5 près dans un intervalle bilatéral au niveau 0.9?

(c) L'écart-type est maintenant inconnu et la valeur de S^{2*} pour notre échantillon est 4. Donner un intervalle de confiance bilatéral au niveau 0.95 sur σ^2.

7. On dispose d'un échantillon de n variables variables aléatoires indépendantes X_i issues d'une loi normale de moyenne μ et de variance σ^2.

   (a) Dans cette première question, on supposera σ connu.

      i. Déterminez l'estimateur du maximum de vraisemblance de μ. On le notera $\hat{\mu}$. Montrez que cet estimateur est sans biais, convergent, efficace et exhaustif.

      ii. L'échantillon obtenu est le suivant :

      11 9 11 13 11 12 9 8 12 11 9 8 7 13 11 10 7 10 8 10

      Quelle est la valeur de l'estimateur de la moyenne ? Sachant que l'écart type est égal à 2, déterminez un intervalle de confiance bilatéral à 95% de la moyenne.

   (b) En réalité, l'écart-type n'est pas connu. On considère comme estimateur de la moyenne celui obtenu dans la question précédente et comme estimateur de σ^2 l'expression

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \hat{\mu})^2$$

      i. Les estimateurs $\hat{\mu}$ et $\widehat{\sigma^2}$ sont-ils les estimateurs du maximum de vraisemblance ? Justifiez votre réponse.

      ii. Déterminez un intervalle de confiance bilatéral symétrique à 95% de la moyenne. Faites l'application numérique avec les données de la question précédente.

-12

450 1530

1.6 Tests

1. La durée de vie de tubes fluorescents d'un certain modèle est supposée obéir à une loi normale d'écart-type égal à 150 heures et de moyenne μ inconnue. La durée de vie moyenne d'un échantillon de 100 tubes a été trouvée égale à 1570 heures.

   (a) Effectuer le test

   $$\begin{cases} H_0: & \mu = 1600 \\ H_1: & \mu = 1500. \end{cases}$$

   avec un niveau de signification de 0.05, puis de 0.01.

   (b) Refaire le test en prenant pour hypothèse alternative $\mu < 1600$, puis $\mu \neq 1600$.

2. La législation en vigueur impose une limite de bruit de 80 dB au voisinage des aéroports. Au-delà de cette limite, l'aéroport doit indemniser les riverains. Les habitants d'une localité voisine prétendent que la limite est dépassée alors que l'aéroport assure que le bruit moyen n'est que de 78 dB. Des experts sont convoqués pour tenter de savoir quelle décision doit être prise. Pour cela, ils effectuent des mesures de bruit sur 100 avions. Ils font l'hypothèse que le bruit moyen émis par un avion se comporte comme une variable aléatoire gaussienne d'espérance μ et de variance σ^2 supposée connue et égale à 49. Afin de pouvoir tirer des conclusions, ils décident de faire un test d'hypothèse sur la valeur de μ.

   (a) Interpréter le choix du test :

   $$\begin{cases} H_0: & \mu = \mu_0 = 80 \\ H_1: & \mu = \mu_1 = 78. \end{cases}$$

   (b) Résoudre complètement ce test ($\alpha = 5\%$).

   (c) Que décidera-t-on si $\overline{X}$ prend la valeur 79.1 ?

   (d) Calculer β et en déduire la puissance du test.

   (e) Comment résoudre le test :

   $$\begin{cases} H_0: & \mu = 80 \\ H_1: & \mu < 80. \end{cases}$$

3. Un industriel affirme que sa production a moins de 10% de défectueux. Après un contrôle de 20 pièces prises au hasard, une seule n'a pas fonctionné.

   (a) En notant p la proportion de défectueux, faire le test :

   $$\begin{cases} H_0: & p \leq 0.1 \\ H_1: & p > 0.1. \end{cases}$$

   avec $\alpha^* = 5\%$.

   (b) Calculer la probabilité d'accepter H_0 si la proportion de défectueux est de 15% et commenter ce résultat.

   (c) Combien faut-il contrôler de pièces pour que la réponse à la question précédente soit 0.10 ?

4. On effectue 10 mesures indépendantes sur une population supposée obéir à une loi de Gauss $N(\mu, \sigma^2)$ et on obtient les résultats suivants : $\sum_{i=1}^{10} x_i = 30$ et $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 117$.

   (a) Effectuer le test d'hypothèse ($\alpha = 5\%$) :

   $$\begin{cases} H_0: & \sigma = 1.5 \\ H_1: & \sigma \neq 1.5. \end{cases}$$

   (b) De quelle taille doit-être l'échantillon pour que la probabilité de rejeter H_0 quand l'écart-type vaut 3 soit au moins 0.95 ?

5. Une variable aléatoire suit la loi de probabilité suivante

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\lambda^2} & \text{si } 0 < x < \lambda \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On désire faire le test suivant

$$\begin{cases} H_0 : & \lambda = \lambda_0 = 3 \\ H_1 : & \lambda < \lambda_0. \end{cases}$$

   (a) Donner l'estimateur $\hat{\lambda}_{MV}$ de λ par la méthode du maximum de vraisemblance et l'estimateur $\hat{\lambda}_m$ de λ par la méthode des moments.
   (b) Proposer de manière empirique une règle de décision utilisant $\hat{\lambda}_{MV}$ avec une erreur de première espèce α (on utilisera la fonction de répartition de $\hat{\lambda}_{MV}$).
   (c) Même question avec $\hat{\lambda}_m$.
   (d) Représenter graphiquement les régions critiques des 2 règles lorsque $n = 2$.
   (e) On dispose de l'échantillon

$$2.886, 2.157, 1.224, 0.206, 2.515, 1.816, 0.346, 1.280, 1.881, 2.799$$

      i. Quelles hypothèses choisit-on avec chacune des 2 règles ($\alpha = 5\%$)?
      ii. Tracer les courbes de puissance des 2 règles pour $\alpha = 1\%$ et 5% et conclure.

6. L'instant T de panne d'un appareil est une variable aléatoire obéissant à une loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$:

$$f(t) = \frac{1}{\mu} e^{-t/\mu} 1_{]0,+\infty[}$$

On réalise deux expériences.

   – 1ère expérience
   On met $n = 225$ appareils en service à la même date t_0 et on note T_i l'instant de panne de l'appareil numéro i.
   (a) Calculer l'espérance mathématique de T.
   (b) Donner l'estimateur de μ par la méthode du maximum de vraisemblance. Est-il efficace? Si oui, donner sa variance.
   (c) On suppose que le temps moyen de fonctionnement sans panne de ce type d'appareil est inférieur à 750 heures. Tester cette hypothèse avec $\alpha^* = 0.05$. Application numérique : $\bar{t} = 812$ heures.
   (d) Calculer β si le temps moyen de bon fonctionnement est de 900 heures.

   – 2ème expérience
   On met n appareils en service durant un temps $\tau = 500$ heures et on compte le nombre d'appareils en panne à l'issue de cette période τ.
   (a) Calculer la probabilité p pour qu'un appareil tombe en panne entre les instants 0 et τ.
   (b) Soit X, le nombre d'appareils en panne avant τ, sur les n qui avaient été mis en service. Donner la loi de X.
   (c) Reformuler les hypothèses du test précédent sur le paramètre de la loi de X et résoudre ce test.
   (d) Calculer β sous la même hypothèse que précédemment.
   (e) Quelle taille devra avoir l'échantillon pour avoir la même puissance que dans la première expérience?

1.7 Tests de comparaison de populations

1. On désire comparer les moyennes de 2 variables aléatoires supposées gaussiennes X et Y. On effectue pour cela 10 mesures indépendantes sur chaque variable aléatoire et on obtient les résultats suivants : $\sum_{i=1}^{10} x_i = 150$, $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 2260$, $\sum_{i=1}^{10} y_i = 140$ et $\sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 1974$.
   (a) Tester l'hypothèse d'égalité des moyennes avec $\alpha = 0.05$.
   (b) Calculer β pour une distance de σ puis de 1.5σ entre les 2 populations.

2. Il s'agit d'une étude sur la sensibilité à la lumière des embryons de poussins (données d'Oppenheim, 1968). La sensibilité est mesurée par le nombre moyen de claquements de bec calculé sur une minute, phénomène qui se produit pendant le dernier tiers de la période d'incubation. Le tableau suivant fournit les résultats de mesures effectuées par paires sur 25 embryons. Pour un embryon donné, on appelle X la mesure faite lorsque celui-ci est placé dans l'obscurité et Y la même mesure dans un milieu éclairé. On sait que la sensibilité à la lumière doit se manifester par une augmentation du nombre moyen de claquements de bec par minute. Tester la validité de cette hypothèse à l'aide du test du signe (prendre $\alpha = 0,1$).

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X	5.8	13.5	26.1	7.4	7.6	23	10.7	9.1	19.3	26.3	17.5	17.9
Y	5	21	73	25	3	77	59	13	36	46	9	25

13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
18.3	14.2	55.2	15.4	30	21.3	26.8	8.1	24.3	21.3	18.2	22.5	31.1
59	38	70	36	55	46	25	30	29	26	71	31	33

3. On réalise une expérience agricole dans le but de comparer 2 engrais que l'on désigne par A et B. Ces engrais diffèrent par leur teneur en azote. Pour cette expérience, on dispose de 9 parcelles de terrain de même nature et ayant la même exposition. Quatre d'entre elles sont tirées au sort et traitées avec l'engrais A ; sur les autres, on utilise l'engrais B. On pèse ensuite la récolte sur chaque parcelle et on obtient les résultats suivants :

A	420	450	460	470	
B	440	450	450	460	490

   Conclure avec $\alpha = 0.1$.

4. On désire comparer 2 tableaux de mesures obtenues par paires mais on ignore la loi de probabilité des variables aléatoires correspondantes.

X	18.5	24.5	11	2.5	5.5	3.5
Y	10.5	19.5	7.5	4	4.5	2

   Proposer et effectuer 2 tests différents pour savoir s'il existe une différence entre X et Y (la variable X serait supérieure à la variable aléatoire Y). Comparer les résultats des 2 tests (prendre $\alpha = 0,1$).

1.8 Tests d'adéquation

1. On examine 400 lots, chacun composé de 100 pièces. On compte dans chaque lot le nombre de pièces ne correspondant pas aux normes (pièces défectueuses). On construit le tableau suivant mettant en regard le nombre k de pièces défectueuses et le nombre n_k de lots présentant k pièces défectueuses.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n_k	0	20	43	53	86	70	54	37	18	10	5	2	2

   (a) Donner, à partir de l'échantillon ci-dessus, la valeur estimée de la moyenne et de la variance de la variable aléatoire X, nombre de pièces défectueuses dans un lot.

   (b) Quelle est la distribution théorique qui vous paraît, compte tenu des résultats précédents, être la plus adaptée? Tester cette hypothèse.

2. La durée de vie d'un produit est une variable aléatoire que l'on suppose obéir à une loi exponentielle de moyenne $\mu = 5$. A partir des mesures suivantes, tester cette hypothèse (on prendra $\alpha = 0.05$) :

   6.1 1.3 11.05 4.6 9.5 1.75 8.2 10.5 15 20.5 0.5.

3. Un industriel désire savoir si la dispersion et le rang du calibre de certaines pièces métalliques sont des grandeurs qui dépendent l'une de l'autre. A l'aide des données suivantes, tester cette hypothèse. avec $\alpha = 0.05$.

Rang \ Dispersion	Faible	Importante	Total
Court	470	27	497
Moyen	350	50	400
Long	380	73	453
Total	1200	150	1350