

Apprentissage en contexte

Examen 2011-2012

Une attention particulière devra être portée sur la justification des calculs. Un résultat exact non justifié sera considéré comme partiellement faux. Le polycopié du cours est autorisé.

1. Opérateurs proximaux

Donner les opérateurs proximaux des fonctions suivantes

- (a) $\Omega(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_1$
- (b) $\Omega_2(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_2^2$
- (c) $\Omega_{EN}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_1 + 1_{x_i \geq 0 \forall i}$

2. Apprentissage de dictionnaire

Soit une matrice \mathbf{X} de dimension $n \times L$ contenant L signaux de dimension n . On cherche à écrire chaque colonne de \mathbf{X} comme étant la combinaison linéaire des M éléments d'un dictionnaire \mathbf{D} . Si on cherche à apprendre à la fois le dictionnaire \mathbf{D} et les coefficients de la combinaison, sans imposer aucune contrainte particulière sur \mathbf{D} et \mathbf{A} , le problème consiste à résoudre :

$$\min_{\mathbf{D}, \mathbf{A}} \frac{1}{2} \|\mathbf{X} - \mathbf{DA}\|_F^2$$

- (a) Donner, en justifiant votre réponse un algorithme permettant de résoudre ce problème
- (b) On veut maintenant imposer le fait que les dictionnaires soient de **norme unitaire**. Proposer une nouvelle formulation mathématique du problème et un algorithme permettant de résoudre ce problème. Le cas échéant, les opérateurs proximaux utilisés devront être calculés et justifiés clairement.
- (c) On veut maintenant imposer le fait que les dictionnaires soient de **norme unitaire** et de **composantes positifs** mais également les composantes de la matrice \mathbf{A} doivent être **positifs**. Proposer une nouvelle formulation mathématique du problème et un algorithme permettant de résoudre ce problème. Le cas échéant, les opérateurs proximaux utilisés devront être calculés et justifiés clairement.